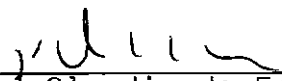


ANÁLISE DE PROBLEMAS DA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM A UTILIZAÇÃO DA SOLUÇÃO
FUNDAMENTAL DE MINDLIN

Jorge Roberto Abrahão Hijjar

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

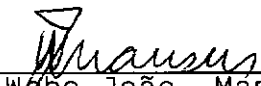
Aprovada por:



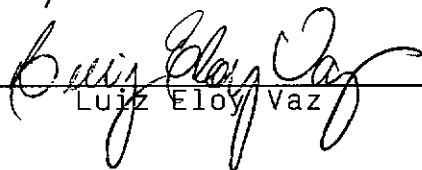
José Claudio de Faria Telles
(Presidente)



Luiz Carlos Wrobel



Webe João Mansur



Luiz Eloy Vaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Março de 1987

HIJJAR, Jorge Roberto Abrahão

Análise de Problemas da Elasticidade Tridimensional pelo Método dos Elementos de Contorno com a Utilização da Solução Fundamental de Mindlin (Rio de Janeiro) 1987.

viii , 96 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1987).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Método dos Elementos de Contorno 2. Elasticidade Tridimensional I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A minha esposa, Andréa

A minha mãe, Juracy

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Claudio de Faria Telles, pela orientação, estímulo e amizade, sem os quais este trabalho não seria possível.

A Selma Fernandes, pelo trabalho de datilografia.

A Pedro Augusto Cezar Oliveira de Sá, pela colaboração na depuração do programa.

Aos meus familiares, amigos e todos que de alguma forma colaboraram para elaboração deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

**ANÁLISE DE PROBLEMAS DA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM A UTILIZAÇÃO DA SOLUÇÃO
FUNDAMENTAL DE MINDLIN**

Jorge Roberto Abrahão Hijjar

Março de 1987

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho trata da análise de problemas da elasticidade tridimensional pelo método dos elementos de contorno, com a utilização da solução fundamental de Mindlin.

Para tanto, uma formulação teórica e um programa de computador baseado nesta foram desenvolvidos. Por ter sido empregada a solução fundamental proposta por Mindlin [1] para semi-espacos infinitos, é obtida uma grande eficiência na solução de problemas desta natureza. Os resultados finais da análise são caracterizados pelos deslocamentos e forças de superfície dos pontos de contorno do corpo e deslocamentos e tensões de pontos internos do mesmo.

Finalmente, alguns exemplos e conclusões são apresentados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

**ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY
PROBLEMS WITH THE BOUNDARY ELEMENT METHOD
USING MINDLIN'S FUNDAMENTAL SOLUTION**

Jorge Roberto Abrahão Hijjar

Março de 1987

Chairman: José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work deals with the analysis of three-dimensional elasticity problems with the boundary element method using Mindlin's fundamental solution.

Hence, a theoretical formulation and a computer program based on it were developed. Since Mindlin's fundamental solution is for a half-space, a good efficiency in the solution of that kind of problems is obtained. The final results of the analysis are displacements and tractions on the boundary of the body and displacements and stresses at internal points.

Finally, some test cases are analysed and conclusions are presented.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO TEÓRICA	4
II.1 - Introdução	4
II.2 - Formulação das Equações para Pontos no Interior do Corpo	4
II.2.1 - A Notação Tensorial Cartesiana	4
II.2.2 - Deslocamentos de Pontos no Interior do Corpo	5
II.2.3 - Soluções Fundamentais	6
II.2.4 - Tensões nos Pontos do Interior do Corpo	8
II.3 - A Equação Integral no Contorno	11
II.4 - Implementação Numérica	14
CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	21
III.1 - Introdução	21
III.2 - A Verificação das Derivadas da Solução Fundamental de Mindlin	21
III.3 - Características Gerais do Programa de Computador....	22
III.4 - O Tipo de Elemento Utilizado	23
III.5 - O Processo de Integração Numérica	24
III.6 - Obtenção dos Valores das Submatrizes Diagonais de \underline{H} e \underline{G}	25

CAPÍTULO IV - MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA	27
IV.1 - Introdução	27
IV.2 - Entrada de Dados	27
IV.3 - Listagem de Saída do Programa	31
 CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	 33
V.1 - Introdução	33
V.2 - Análise de um Cubo Comprimido por Duas Faces	
Opostas.....	33
V.2.1 - Introdução	33
V.2.2 - Apresentação do Problema.....	34
V.2.3 - Análise dos Resultados.....	35
V.3 - Análise de um Cubo Tractionado por Duas Faces	
Opostas tendo uma Terceira Face na Superfície	
Livre.....	39
V.3.1 - Introdução	39
V.3.2 - Apresentação do Problema	39
V.3.3 - Análise dos Resultados	40
V.4 - Análise de um Semi-Espaço Submetido a um Car-	
regamento Uniforme sobre uma Área Retangular	
na Superfície	41
V.4.1 - Introdução	41
V.4.2 - Apresentação do Problema	41
V.4.3 - Análise dos Resultados	43
V.5 - Análise de um Semi-Espaço Submetido a um Car-	
regamento Uniforme sobre uma Área Circular na	
Superfície	45

V.5.1 - Introdução	45
V.5.2 - Apresentação do Problema	46
V.5.3 - Análise dos Resultados	47

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	51
--------------------------------	----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
----------------------------------	----

APÊNDICES	55
-----------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A constante procura por métodos cada vez mais eficientes para a resolução de problemas de Engenharia, associada ao acelerado desenvolvimento tecnológico na área de computadores, tem proporcionado o aparecimento de vários métodos numéricos que se propõem a atingir este objetivo. Dentre estes métodos, um dos mais conhecidos é, sem dúvida, o método dos elementos finitos. Nos últimos anos, entretanto, um outro método, baseado em formulação teórica diversa, vem se apresentando como poderosa ferramenta para a solução de certos problemas dentro da Engenharia. Este método, chamado de Método dos Elementos de Contorno, ou também menos comumente chamado de Método das Equações Integrais de Contorno, tem se mostrado bastante eficiente principalmente para a resolução de problemas de meios infinitos. Esta peculiaridade do método o torna, em certos casos, especialmente vantajoso em relação a outros métodos numéricos.

Pela sua própria conceituação teórica, a solução fundamental de MINDLIN [1] tem características importantíssimas quando aplicada dentro do método dos elementos de contorno para a solução de problemas em semi-espacos infinitos. Ou seja, a condição da solução fundamental que obriga a nulidade das forças de superfície no plano limitante do semi-espaco, propicia uma grande redução não só do esforço computacional como também daquele necessário ao preparo dos dados de entrada do programa.

Com base nisso, este trabalho foi desenvolvido de forma a se obter uma ferramenta eficiente para problemas desta natureza.

Convém salientar também a característica do trabalho, elaborado como ponto inicial para, futuramente, ser desenvolvido a partir deste um programa maior que englobe outras facilidades do método, tais como:

- . utilização conjunta das soluções fundamentais propostas por Kelvin e Mindlin, através do conceito de subregiões, possibilitando a análise de, por exemplo, problemas de interação solo-estrutura (incluindo solos estratificados), e;
- . utilização do conceito de simetria, para a solução de problemas onde esta exista.

A partir da visão geral apresentada, podemos verificar a propriedade de se utilizar os conceitos, formulações e o programa aqui desenvolvido na solução dos seguintes casos práticos de Engenharia:

- . sapatas (fundações rasas);
- . barragens;
- . cálculo de recalques de apoio;

- . comportamento de solos carregados;
- . determinação de bulbo de pressões e;
- . problemas gerais da elasticidade tridimensional, principalmente em semi-espacos.

Citaremos, agora, alguns outros trabalhos que tratam de temas afins ao desenvolvido neste estudo, para que se possa enquadrá-lo dentro de um contexto mais amplo. Semelhantemente ao que foi aqui elaborado para análise de problemas da elasticidade tridimensional, TELLES e BREBBIA [2] em 1980, o fizeram para problemas de elasticidade bidimensional. Utilizaram eles a solução fundamental de MELAN [3] para tensões nos pontos internos e a estenderam para os deslocamentos. Nesta mesma época, NAKAGUMA [4] elaborou tese de doutoramento tratando de problemas em três dimensões, só que como resultados finais obtinha apenas os deslocamentos nos pontos internos do corpo. Convém salientar que até então não haviam sido deduzidas, ainda, expressões para as derivadas da solução fundamental de Mindlin. Pelo que sabemos, tais expressões foram apresentadas pela primeira vez por CAESTECKER, DHONDT e WYNENDAELE [5] em 1984. Estas foram por nós verificadas e utilizadas, sendo que um erro foi encontrado em uma das fórmulas e conseqüentemente corrigido. Outros trabalhos mais específicos poderiam ser citados, mas acreditamos serem esses os que bem caracterizam a linha de pesquisa sobre o tema em questão.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO TEÓRICA

II.1 - INTRODUÇÃO

Não é objetivo deste trabalho o desenvolvimento de toda a formulação teórica do método dos elementos de contorno. Isto decorre do fato desta formulação estar suficientemente abordada na bibliografia disponível sobre o assunto. Procuraremos aqui, tratar da formulação teórica específica do tema deste trabalho, de modo a tornar o texto extremamente objetivo e não deixando assim que desenvolvimentos e citações repetitivos tornem sua leitura desagradável ou cansativa.

II.2 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA PONTOS NO INTERIOR DO CORPO

II.2.1 - A Notação Tensorial Cartesiana

Neste trabalho a notação tensorial Cartesiana (notação indicial) será usada. Esta notação não é só eficiente para escrever expressões longas mas também para derivações e nas provas de teoremas. Tal notação utiliza índices subscritos (1, 2, 3) para representar (x, y, z) e torna a utilização de símbolos de somatórios desnecessários quando a mesma letra subscrita aparece duas vezes em um termo. Em três dimensões, temos, por exemplo:

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (\text{II.1})$$

e

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

II.2.2 - Deslocamentos de Pontos no Interior do Corpo

Começaremos nosso estudo a partir da bem conhecida equação chamada de Identidade de Somigliana para deslocamentos [6], sendo que sua dedução formal pode ser encontrada em, por exemplo, BREBBIA, TELLES e WROBEL [7]. Esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

onde

Γ representa o contorno do corpo,

Ω representa o interior do corpo,

$u_j(x), p_j(x)$ representam deslocamentos e forças de superfície na direção j dos pontos x do contorno do corpo,

$b_j(x)$ representa a força de volume agindo na direção j , sendo que em nosso estudo será considerada nula, por simplificação, e

$u_{ij}^*(\xi, x), p_{ij}^*(\xi, x)$ representam deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto x correspondentes a uma força unitária agindo na direção i aplicada no ponto ξ e são soluções singulares da equação de Navier (chamadas soluções fundamentais) satisfazendo:

$$G u_{j, kk}^* + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{k, kj}^* + \Delta(\xi, x) e_j = 0 \quad (\text{II.3})$$

onde e_j é o vetor unitário na direção j , G é o módulo de elasticidade transversal e $\Delta(\xi, x)$ representa a função delta de Dirac, tendo as seguintes propriedades:

$$\Delta(\xi, x) = 0 \quad \text{se} \quad \xi \neq x$$

$$\Delta(\xi, x) = \infty \quad \text{se} \quad \xi = x \quad (\text{II.4})$$

$$\int_{\Omega} g(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \quad \text{se} \quad \xi \in \Omega^*$$

II.2.3 - Soluções Fundamentais

A partir da definição de solução fundamental introduzida no item anterior, poderíamos falar aqui de diferentes soluções singulares da equação de Navier de acordo com o tipo de região e contorno envolvidos. Porém, visando maior objetividade, trataremos apenas daquela proposta por Mindlin relativa a cargas concentradas agindo dentro de um semi-espaco infinito.

Neste caso a região de interesse é um meio semi-infinito com o plano limitante considerado como uma superfície descarregada. No nosso trabalho este plano foi suposto sempre como aquele em que $x_1 = 0$. O procedimento utilizado por Mindlin pode ser acompanhado em seu trabalho [1] onde se observa que a solução fundamental completa para um semi-espaco infinito pode ser obtida pela superposição de 18 núcleos de deformação derivados da solução de Kelvin para um meio infinito.

As expressões propostas por Mindlin estão apresentadas no Apêndice A deste trabalho. Convém salientar que antes da utilização destas expressões efetuamos uma verificação analítica das mesmas, de modo a garantir estarem elas corretas.

Outro grupo de expressões de fundamental importância no nosso trabalho, como será visto posteriormente, é o relativo às derivadas da solução fundamental de Mindlin para deslocamentos e tensões e foi apresentado por CAESTECKER, DHONDT e WYNENDAELE [5]. Uma verificação numérica destas expressões foi executada e mostrou a necessidade da correção de uma das expressões que continha um pequeno erro. Os procedimentos usados nesta verificação estão explicitados no item referente à formulação computacional. Todas essas expressões estão mostradas no Apêndice B.

Cabe aqui uma discussão sobre a extrema vantagem da utilização da solução fundamental de Mindlin para problemas de semi-espacos. Como será visto quando do desenvolvimento da formulação do método para a análise, será necessária a discretiza-

ção do contorno do corpo a ser analisado. A condição de nulidade das forças de superfície no plano limitante do semi-espço, que está embutida nesta solução fundamental, permite a não discretização da superfície efetivamente livre, ou seja, só precisam ser discretizadas as regiões desta superfície onde os deslocamentos são prescritos ou existem cargas aplicadas. Desta forma tornam-se extremamente eficientes as análises de problemas desta natureza, reduzindo sobremaneira os esforços computacional e de preparo dos dados de entrada necessários. Mais adiante em nosso trabalho, quando do desenvolvimento efetivo do método, voltaremos a tratar desse assunto de forma a ficar bem clara a razão dessa propriedade.

II.2.4 - Tensões nos Pontos do Interior do Corpo

Partindo da equação (II.2), ou seja da identidade de Somigliana porém já considerando a nulidade de $b_j(x)$, temos:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (II.5)$$

Combinando a equação (II.5) com a equação dada pela teoria da elasticidade:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{\beta, \beta} \delta_{ij} + G(u_{i, j} + u_{j, i}) \quad (II.6)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões e

$$\text{onde } \lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

sendo ν o coeficiente de Poisson,

temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} (\lambda \delta_{ij} u_{\beta k, \beta}^*(\xi, x) p_k(x) + G(u_{ik, j}^*(\xi, x) p_k(x) + \\ & + u_{jk, i}^*(\xi, x) p_k(x)) - \lambda \delta_{ij} p_{\beta k, \beta}^*(\xi, x) u_k(x) + \\ & - G(p_{ik, j}^*(\xi, x) u_k(x) + p_{jk, i}^*(\xi, x) u_k(x))) d\Gamma(x) \quad (\text{II.7}) \end{aligned}$$

Sabemos, também, que:

$$p_{ij}^* = \sigma_{jai}^* \cdot n_a, \quad (\text{II.8})$$

onde n_a representa os cossenos diretores da normal externa ao contorno do corpo e os elementos (ξ, x) e (x) foram omitidos por simplificação, assim como faremos adiante.

Temos, então:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int (\lambda \delta_{ij} u_{\beta k, \beta}^* p_k + G(u_{ik, j}^* p_k + u_{jk, i}^* p_k) + \\ & - \lambda \delta_{ij} \sigma_{\beta ka, \beta}^* n_a u_k - G(\sigma_{ika, j}^* n_a u_k + \sigma_{jka, i}^* n_a u_k)) d\Gamma \quad (\text{II.9}) \end{aligned}$$

Deve ser frisado que durante a conversão das equações (II.5), (II.6) e (II.8) na equação (II.9), somente a solução fundamental foi derivada, o que não foi feito com as normais ou as tensões

ou os deslocamentos do contorno. Em outras palavras, o que efetivamente se faz em (II.6), quando se combinam as derivadas da equação (II.5) com respeito às coordenadas de ξ , é avaliar a variação do deslocamento u_i na direção j para achar a tensão σ_{ij} . Desde que u_i é calculado pela integração sobre o contorno do corpo (equação II.5)), podemos analisar os três termos relativos à interferência desse contorno. É claro que para dois pontos vizinhos no interior do corpo e um certo ponto no contorno, somente os valores da solução fundamental vão ser diferentes. As normais assim como os valores das forças de superfície e deslocamentos são idênticos. Isto explica porque somente a solução fundamental é derivada.

Finalmente, de forma a inclusive facilitar a implementação numérica da equação (II.9), podemos transformá-la em:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \quad (II.10)$$

onde

$$D_{kij} = \lambda \delta_{ij} u_{\beta k, \beta}^* + G(u_{ik, j}^* + u_{jk, i}^*) \quad (II.11)$$

e

$$S_{kij} = (\lambda \delta_{ij} \sigma_{\beta ka, \beta}^* + G(\sigma_{ika, j}^* + \sigma_{jka, i}^*)) n_a$$

(com um somatório implícito em β e a).

Com a equação (II.11) e as expressões das derivadas da solução fundamental, apresentadas no Apêndice B, pode-se facilmente chegar às tensões dos pontos internos a partir dos deslocamentos e forças de superfície do contorno.

Convém, ainda, salientar que a dedução das expressões acima foi baseada no trabalho de CAESTECKER, DHONDT e WYN-ENDAELE [5].

II.3 - A EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

É fácil notar que da forma como foi visto até agora as equações (II.5) e (II.10) não são suficientes para a obtenção de resultados, a menos que sejam conhecidos os deslocamentos e forças de superfície no contorno. Desta forma, é imprescindível a análise da forma da equação (II.5) quando ξ tende para o contorno.

Primeiramente, visto que estamos utilizando a solução fundamental para semi-espacos infinitos, devemos reexaminar a equação (II.5) de modo a repassar uma importante simplificação na mesma. Se o corpo a ser estudado apresenta parte de seu contorno coincidente com a superfície do semi-espaco, a integral sobre esta parte do contorno que envolve p_{ij}^* se anula em razão da condição de nulidade das forças de superfície embutida na solução fundamental. Desta forma, a equação (II.5) pode ser reescrita como a seguir:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma'} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.12})$$

onde Γ' representa a parte do contorno em que $x_1 > 0$.

A equação (II.12) pode ser usada para pontos fonte localizados na superfície do semi-espaco $\Gamma - \Gamma'$ sem maiores modificações. Isto ocorre porque, para essas condições de ponto fonte, a singularidade que ocorre na primeira integral do lado direito da equação pode ser integrada no sentido usual. Ainda mais, se o problema a ser analisado satisfaz a condição de nulidade de forças de superfície ($p_j(x) = 0$) sobre parte de $\Gamma - \Gamma'$, esta singularidade fraca é também removida, permitindo que pontos fonte nessa parte do contorno sejam considerados como pontos internos.

As expressões da solução fundamental de Mindlin podem, como é feito na maioria dos casos, ser divididas em duas partes. A primeira seria aquela relativa à solução fundamental de Kelvin e uma outra parte, comumente referida como expressões complementares. Devido à natureza não singular das expressões complementares a utilização da equação (II.12) para pontos fonte localizados no contorno Γ' cria exatamente as mesmas singularidades obtidas para a formulação de Kelvin. Desta forma, fazendo uso dos mesmos procedimentos usados na implementação do método dos elementos de contorno com a solução fundamental de Kelvin (ver, por exemplo, BREBBIA, TELLES e WROBEL [7]), podemos chegar facilmente à equação:

$$\hat{c}_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma'} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (II.13)$$

na qual a integral do lado esquerdo deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy e a expressão $c_{ij}(\xi)$ corresponde apenas a parte da solução fundamental relativa a Kelvin. Desta forma, tem-se que $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ para superfícies suaves. Para outros casos os valores de c_{ij} podem ser obtidos de outras referências [8,9] (no caso específico do nosso estudo, por adotarmos elementos planos, teremos sempre superfícies suaves).

No caso especial quando a carga está localizada na interseção do contorno Γ' e o plano limite do semi-espaco também pode ser empregada a expressão (II.13). Entretanto, neste caso relações de limites são envolvidas resultando em uma expressão diferente para c_{ij} . Esta exceção não cria nenhuma dificuldade adicional e a expressão correta para c_{ij} pode ser obtida pela aplicação de equação (II.13) para representar movimentos de corpo rígido.

Concluindo, então, a equação (II.13) pode ser qualificada como representante da equação (II.12) para qualquer ponto fonte do contorno se $c_{ij} = \delta_{ij}$ quando se referir à parte do contorno $\Gamma - \Gamma'$.

Dentre as diferentes aplicações das equações obtidas, problemas referentes a semi-espacos infinitos, tendo ou não cavidades finitas, podem ser analisados sem requerer nenhuma in-

tegração no contorno infinito, garantindo-se que as mesmas condições de regularidade para a implementação análoga da solução de Kelvin são satisfeitas no infinito (ver, por exemplo, TELLES [10]).

Neste ponto é adequado voltarmos à discussão sobre a grande vantagem da utilização da solução fundamental de Mindlin para a resolução de problemas de semi-espço. Analisando as equações (II.12) e (II.13) podemos notar que apenas uma das integrais é efetuada sobre todo o contorno Γ , sendo a outra efetuada sobre Γ' . É ela

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x)$$

Ora, se para partes do contorno pertencentes a $\Gamma - \Gamma'$ tivermos forças de superfície nulas, ou seja, $p_j(x) = 0$, os elementos relativos a essas partes não influirão nos resultados. Dessa forma se explica não ser necessário a discretização dessa região, como já foi dito várias vezes anteriormente.

II.4 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O objetivo deste item é descrever sucintamente os procedimentos numéricos gerais para a solução de problemas, pelo método dos elementos de contorno.

Reescrevendo a equação integral no contorno obtida do item II.2.5, temos:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma'} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (II.13)$$

Ao invés de tentar soluções fechadas para a equação (II.13), o que é difícil e somente alcançável para geometrias e condições de contorno bem simples, o método dos elementos de contorno utiliza uma abordagem numérica. Os pontos básicos desse procedimento estão resumidos abaixo, sendo que a forma como foram aplicados em nosso trabalho será descrita no Capítulo III - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL:

a) O contorno Γ é discretizado numa série de elementos sobre os quais deslocamentos e forças de superfície são interpolados entre os pontos nodais do elemento.

b) A equação (II.13) é aplicada na forma discretizada para cada ponto nodal ξ do contorno Γ e as integrais são computadas (geralmente de forma numérica) sobre cada elemento. Um sistema de equações algébricas lineares envolvendo todos os deslocamentos e forças de superfície nodais é então obtido.

c) As condições de contorno são impostas e consequentemente valores nodais (deslocamento ou força de superfície em cada direção por nó) são prescritos. Desta forma o sistema de equações pode ser resolvido por métodos normais para se obter os resultados restantes no contorno.

d) Pelo uso das equações (II.5), (II.10) e (II.11) pode-se então calcular, também utilizando integrais numéricas, os deslocamentos e tensões nos pontos internos.

A partir dos procedimentos acima e da utilização das funções de interpolação como mostrado em [7], podemos escrever a equação (II.13) na forma matricial como abaixo,

$$\underline{c} \underline{u} + \int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{p} \, d\Gamma \quad (\text{II.14})$$

Esta formulação é válida para um ponto fonte no contorno. Deve ser notado que as matrizes \underline{p}^* e \underline{u}^* são conhecidas (representam as componentes da solução fundamental nas direções consideradas) e \underline{c} pode ser obtida analiticamente ou pelas condições de deslocamentos de corpo rígido. As incógnitas são então \underline{u} e \underline{p} (deslocamentos e forças de superfície) no contorno.

Assumindo ser o contorno subdividido em elementos, pode-se ter, então, elementos constantes, lineares, quadráticos ou de ordem superior e os mesmos podem ser triangulares ou quadriláteros. Uma visão mais geral dessa subdivisão e suas consequências pode ser obtida em [7]. No nosso trabalho, tendo sido utilizados elementos triangulares constantes, concentraremos nossa dedução nesse caso.

Os valores de \underline{u} e \underline{p} sobre cada elemento são aproximados como sendo iguais aos valores de \underline{u}_k e \underline{p}_k do nó do elemento.

$$\underline{u} = \underline{u}_k$$

(II.15)

$$p = p_k$$

Uma visão melhor desses elementos e nós pode ser obtida observando-se o desenho abaixo.

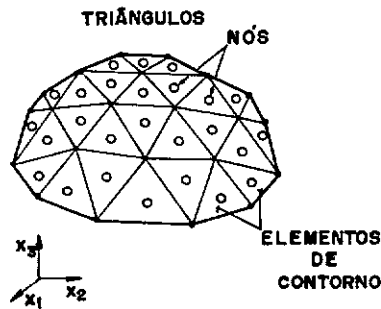


FIG.1- CORPO TRIDIMENSIONAL DIVIDIDO EM ELEMENTOS CONSTANTES

Podemos, agora, substituir (II.15) em (II.14) e obter:

$$\underline{c} \underline{u}_k + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right) \underline{u}_k = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* d\Gamma \right) p_k \quad (\text{II.16})$$

onde o somatório de $j = 1$ a N indica a soma sobre todos os N elementos no contorno e Γ_j é a superfície do elemento j .

As integrais da equação (II.16) são geralmente resolvidas numericamente e os pontos da superfície Γ_j são expressos em termos de um sistema de coordenadas locais homogêneo, com as coordenadas κ_1 e κ_2 . Então

$$d\Gamma = (\text{valor absoluto de } |G|) d\kappa_1 d\kappa_2 \quad (\text{II.17})$$

Desta forma, a equação (II.16) fica:

$$\begin{aligned} \underline{c} \underline{u}_k + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{l=1}^L |G| w_l p^*(\kappa_1, \kappa_2) \right) \underline{u}_k &= \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{l=1}^L |G| w_l \underline{u}^*(\kappa_1, \kappa_2) \right) p_k \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

onde $|G|$ é o Jacobiano para a transformação tridimensional e w_l são os pesos da integração numérica. Os procedimentos usados em nosso trabalho será mais detalhado no Capítulo III - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.

Escrevendo, então, a equação (II.18) na forma matricial para todos os nós da estrutura, temos:

$$\begin{bmatrix}
 h_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1i} & \dots & \hat{h}_{1r} \\
 \hat{h}_{21} & h_{22} & \dots & \hat{h}_{2i} & \dots & \hat{h}_{2r} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \hat{h}_{i1} & \hat{h}_{i2} & \dots & h_{ii} & \dots & \hat{h}_{ir} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \hat{h}_{r1} & \hat{h}_{r2} & \dots & \hat{h}_{ri} & \dots & h_{rr}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 \vdots \\
 u_i \\
 \vdots \\
 u_r
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1r} \\
 g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2r} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ii} & \dots & g_{ir} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 g_{r1} & g_{r2} & \dots & g_{ri} & \dots & g_{rr}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 p_1 \\
 p_2 \\
 \vdots \\
 p_i \\
 \vdots \\
 p_r
 \end{Bmatrix}
 \quad (II.19)$$

onde \hat{h}_{ij} e g_{ij} são submatrizes 3×3 que representam a interação entre o nó i e todos os outros nós do contorno do corpo. Para elementos constantes, somente o elemento j vai contribuir para os termos de \hat{h}_{ij} e g_{ij} . Note-se também que as submatrizes h_{ii} da diagonal são:

$$h_{ii} = \hat{h}_{ii} + c_i \quad (II.20)$$

Por fim, a equação (II.19) pode ser representada como:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} \quad (II.20)$$

Devemos, agora, aplicar as condições de contorno que podem ser de dois tipos:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad u_i &= \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \quad \text{e} \\
 (ii) \quad p_i &= \bar{p}_i \quad \text{em } \Gamma_2
 \end{aligned}
 \quad (II.22)$$

Desta forma obtemos, após a reordenação do sistema de equações (II.21), um sistema final a ser resolvido da forma:

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{F} \quad (\text{II.23})$$

onde o vetor \underline{X} inclui deslocamentos e forças de superfície desconhecidos. Após a resolução do sistema, podemos com o uso das equações (II.5), (II.10) e (II.11) obter deslocamentos e tensões em pontos internos do corpo.

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

III.1 - INTRODUÇÃO

Após termos desenvolvido a formulação teórica do método dos elementos de contorno de forma bastante específica para o nosso caso, temos a intenção de, neste capítulo, mostrar os procedimentos usados quando da elaboração do programa de computador baseado nessa formulação. Não é, entretanto, nosso objetivo a abordagem de todas as partes do programa, mas sim daquelas que tenham efetiva importância para o entendimento do funcionamento do mesmo.

III.2 - A VERIFICAÇÃO DAS DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

No início do desenvolvimento deste trabalho, quando da decisão sobre a utilização das expressões das derivadas da solução fundamental de Mindlin, ficou clara a necessidade de se executar uma verificação dessas expressões. Desta forma, eliminaríamos a possibilidade de um erro nessas expressões afetar mais tarde os resultados para tensões nos pontos internos.

Dois procedimentos eram possíveis, ou seja, a verificação poderia ser analítica ou numérica. Por acharmos que a verifi

cação numérica seria mais rápida e segura, visto que pelo fato de a verificação analítica ser bastante laboriosa e podermos nós mesmos incorrer em erros, optamos pela numérica.

Para tanto, elaboramos uma sub-rotina para o cálculo das expressões da solução fundamental de Mindlin (já tendo sido verificada a correção da programação) e das suas derivadas. Um pequeno programa de computador foi então implementado para comparar os resultados das expressões das derivadas com aqueles calculados por processo numérico.

A análise dos resultados obtidos mostraram, então, uma discordância nos resultados da expressão relativa a $u_{31,i}^*$ apresentada em [5]. Desta forma pudemos comprovar, por comparação com outras fórmulas lá apresentadas, a existência de um erro nesta expressão.

III.3 - CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROGRAMA DE COMPUTADOR

Optamos pela elaboração de um programa bastante subdividido e, portanto, com a utilização de uma sub-rotina para a execução de cada passo do procedimento geral.

No programa principal, fizemos uso de um vetor geral para armazenamento de dados, tornando, assim, mais eficiente a alocação de memória. A partir da definição dos apontadores para esse vetor, passamos para a execução dos procedimentos efetivos

do método dos elementos de contorno já vistos anteriormente, ou seja:

- a) entrada de dados; com a leitura das coordenadas dos vértices dos elementos, incidências, condições de contorno e valores de constantes físicas;
- b) montagem das matrizes \underline{H} e \underline{G} ; uma sub-rotina para cálculo das submatrizes diagonais e outra para aquelas fora da diagonal;
- c) reorganização do sistema de equações, pela consideração das condições de contorno;
- d) resolução do sistema de equações, e consequente obtenção dos resultados no contorno;
- e) cálculo de resultados nos pontos internos;
- f) impressão dos resultados.

Mais adiante apresentaremos o manual de utilização do programa e no Apêndice D pode ser encontrada uma listagem referente a uma análise efetuada pelo programa, a título de ilustração.

III.4 - O TIPO DE ELEMENTO UTILIZADO

O elemento triangular constante, aquele em que ao longo do mesmo os deslocamentos e forças de superfície são considere

rados constantes e iguais aos valores do nó central, tem como principais características a simplicidade e facilidade de implementação. Por isso mesmo, escolhemos tal elemento para nosso programa, visto que apesar de sua simplicidade, consegue (com um bom processo de discretização) bons resultados na análise de grande parte dos problemas encontrados. Principalmente aqueles relacionados com semi-espacos infinitos. Uma visualização desses elementos foi apresentada na figura 1.

III.5 - O PROCESSO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O processo numérico de integração sobre os elementos que foi utilizado no programa foi elaborado por HAMMER, MARLOWE e STROUD [11]. Foram adotados 13 pontos de integração por elemento, sendo que as coordenadas locais dos pontos e seus respectivos pesos foram obtidos em [12]. Convém frisar, entretanto que, tanto em [7] quanto em [12], existe um erro na tabela de pesos w_ℓ . Nessas tabelas os valores de w_ℓ estão multiplicados por 2.

Na forma atual do programa esse número de pontos de integração está fixado em 13 para qualquer distância entre o ponto fonte e o elemento em questão. Isto se dá por questão de simplicidade. Deve ser citado aqui, entretanto, a enorme economia de esforço computacional que pode ser obtida pela utilização em problemas de grande porte do conceito de integração seletiva. Esta integração seletiva nada mais é do que a utilização de um número de pontos de integração variável. Dependendo da

relação entre a distância do ponto fonte ao elemento e a área deste elemento, pode-se variar o número de pontos de integração utilizado sem que se altere de forma perceptível os resultados obtidos. De uma forma simplista pode-se dizer que quanto maior aquela relação menor o número de pontos requeridos.

III.6 - OBTENÇÃO DOS VALORES DAS SUBMATRIZES DIAGONAIS DE \underline{H} E \underline{G}

Devido às singularidades que ocorrem quando o ponto fonte se encontra no próprio elemento a ser integrado, a utilização do processo de integração numérica apresentado no item anterior não pode ser feita diretamente. Duas possibilidades se apresentam, então:

- a) utilização de integração analítica nesses casos;
- b) subdivisão do elemento em vários outros de forma a se eliminar as dificuldades causadas pelas singularidades e, pela integração numérica normal sobre esses elementos auxiliares, se obter um resultado bem preciso.

No nosso caso, optamos pela segunda alternativa. Inicialmente, da forma como foi proposta por NAKAGUMA [4], ou seja, com a subdivisão do elemento em outros nove auxiliares. Posteriormente, com o objetivo de testar a convergência dos resultados quando de uma maior discretização, subdividimos o elemento em outros vinte e sete auxiliares. Pudemos, assim, comprovar a convergência esperada no cálculo das submatrizes. Convém, entretanto, frisar que nos resultados finais obtidos pelo progra-

ma não foi notada uma diferença significativa quando da utilização de uma ou outra subdivisão. O programa existe hoje em duas versões, cabendo ao usuário a escolha de qual usar. Para tornar mais fácil o entendimento dessas subdivisões, apresentamos abaixo uma figura ilustrativa desse procedimento.

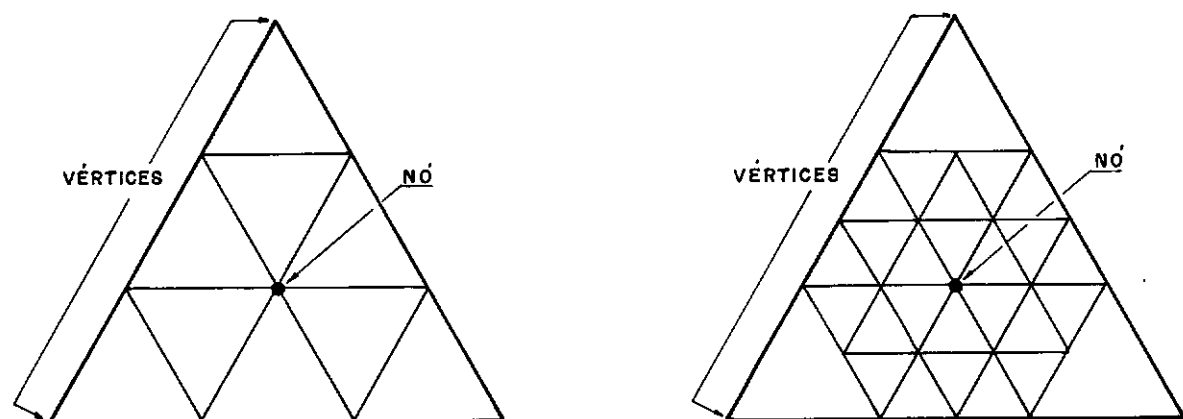


FIG. 2 — SUBDIVISÃO DO ELEMENTO EM 9 OU 27 ELEMENTOS AUXILIARES PARA CÁLCULO DAS SUBMATRIZES \underline{h} e \underline{g} DIAGONAIS

CAPÍTULO IV

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA

IV.1 - INTRODUÇÃO

Apresentamos, a seguir, o manual de utilização do programa, ao qual demos o nome de BOUNDARY. Escrito em linguagem FORTRAN V, de forma bastante simples e clara, esse programa tem a característica de ser facilmente implantado na maioria dos sistemas computacionais.

IV.2 - ENTRADA DE DADOS

Registro 1

- tipo de dado: dados gerais da análise
- formato: 3I10
- variáveis: NNOC - número de vértices de elementos
NNCO - número de elementos de contorno
NNIN - número de pontos internos onde se quer resultados.

Registro 2

- tipo de dado: título do problema
- formato: 17A4
- variáveis: TIT(I), I = 1,17

Obs: Este título que poderá conter 68 caracteres será impresso no topo da primeira página da listagem de saída do programa.

Registro 3

- tipo de dado: constantes físicas do material
- formato: 2F10.0
- variáveis: EG - módulo de elasticidade transversal
XNU - coeficiente de Poisson

Registro 4

- tipo de dado: coordenadas dos vértices dos elementos
- formato: I10, 3F10.0

variáveis: I - número do vértice

CX(I) - coordenada X do vértice

CY(I) - coordenada Y do vértice

CZ(I) - coordenada Z do vértice

Obs: Haverão NNOC registros 4.

A coordenada X no nosso programa é sempre considerada como sendo perpendicular ao plano limite do semi-espaco e tendo seu valor nulo nesse plano. As outras duas coordenadas devem apenas respeitar a regra da mão direita.

Os vários registros deverão estar posicionados de forma a que os números dos vértices fiquem em ordem crescente.

Registro 5

- tipo de dado: coordenadas dos pontos internos
- formato: I10, 3F10.0
- variáveis: I - número do ponto
 - X(I) - coordenada X do ponto
 - Y(I) - coordenada Y do ponto
 - Z(I) - coordenada Z do ponto

Obs: Haverão NNIN registros 5

Valem aqui também as duas últimas observações efetuadas para o registro 4.

Registro 6

- tipo de dado: incidências dos elementos

- formato: 4I10

- variáveis: I - número do elemento

INCID(I,1) - primeiro vértice do elemento

INCID(I,2) - segundo vértice do elemento

INCID(I,3) - terceiro vértice do elemento

Obs: Haverão NNC0 registros 6

Os vários registros devem estar posicionados de forma a que os números dos elementos fiquem em ordem crescente.

Obs. Import. A ordem dos vértices dos elementos é de fundamental importância para a análise. Ou seja, os elementos devem ser definidos de forma a que, pela regra da mão direita, se obtenha uma normal externa ao corpo. É válido salientar que, a partir de uma definição errada da incidência, podemos analisar um problema de cavidade ao invés de um corpo fechado, por exemplo.

Registro 7

- tipo de dado: condições de contorno

- formato: I10, 3(I10, F10.0)

- variáveis: I - número do elemento

ICOD(I,1) - tipo de restrição no contorno na direção x.

PRESC(I,1) - valor prescrito para a direção x.

ICOD(I,2) - idem para direção y

PRESC(I,2) - idem para a direção y

ICOD(I,3) - idem para a direção z

PRESC(I,3) - idem para direção z.

Obs: Haverão NNCO registros 7

Os vários registros devem estar posicionados de forma a que os números dos elementos fiquem em ordem crescente.

Se ICOD = 0, o deslocamento é prescrito.

Se ICOD = 1, a força de superfície é prescrita.

No apêndice C, encontram-se apresentados os dados de entrada relativos à listagem do Apêndice D, com a intenção de exemplificar o exposto acima.

IV.3 - LISTAGEM DE SAIDA DO PROGRAMA

Este item tem por objetivo descrever a listagem de saída do programa, de modo a fornecer ao usuário condições de interpretação da mesma.

Inicialmente é impresso um cabeçalho com o nome do programa, o tipo de problema que se dispõe a resolver, local e data de elaboração e nome do autor. No topo da página seguinte, a primeira referente à análise em questão, é impresso o título fornecido pelo usuário. Nesta mesma página são impressos, ainda, número de vértices, elementos e pontos internos e as constantes físicas do material. Nas páginas seguintes são apresentados os dados interpretados relativos às coordenadas dos vértices dos elementos incidências dos elementos e condições de contorno.

A partir desse ponto, começam a ser impressos os resultados do problema, quais sejam:

- a) número do elemento, coordenadas dos nós e seus deslocamentos;
- b) idem para as forças de superfície
- c) número e coordenadas dos pontos internos e seus deslocamentos
- d) número dos pontos internos e tensões nesses pontos.

Como já foi dito anteriormente uma listagem relativa a um exemplo analisado está apresentada no Apêndice D.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Conforme foi dito no Capítulo I deste trabalho, o estudo aqui desenvolvido, tendo como produto final o programa de computador por nós chamado de BOUNDARY, é extremamente eficiente quando aplicado na resolução de vários problemas de Engenharia. De modo a se testar sua eficiência, e a precisão dos resultados obtidos, vários exemplos foram analisados. . Dentre estes, selecionamos os mais expressivos para apresentar neste capítulo onde são também avaliados os resultados do programa.

V.2 - ANÁLISE DE UM CUBO COMPRIMIDO POR DUAS FACES OPOSTAS

V.2.1 - Introdução

O objetivo deste exemplo é o de mostrar que a formulação aqui desenvolvida, com a utilização da solução fundamental de Mindlin, funciona bem para problemas onde não é caracterizada uma superfície livre. Ou seja, nestes casos a utilização da formulação com a solução fundamental de Kelvin tornaria a resolução apenas mais rápida.

V.2.2 - Apresentação do Problema

O exemplo rodado consiste de um cubo de 2.0 m de lado, com sua face superior na coordenada $x_1 = 4.0$ m (dentro do semi-espço), onde, foi aplicada uma carga uniforme na direção x_1 de $100. \text{kN/m}^2$. Na face inferior, foram restringidos os deslocamentos nesta mesma direção. Foram restringidos, ainda, deslocamentos nas direções x_2 e x_3 de modo a se evitar movimentos de corpo rígido. Foi tomado cuidado quando da efetivação dessas restrições de modo a que com elas não fossem introduzidas tensões não desejáveis. As constantes do material usado foram $G = 1000 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0.3$. Foram utilizados 48 elementos de contorno na discretização do corpo, conforme a figura abaixo.

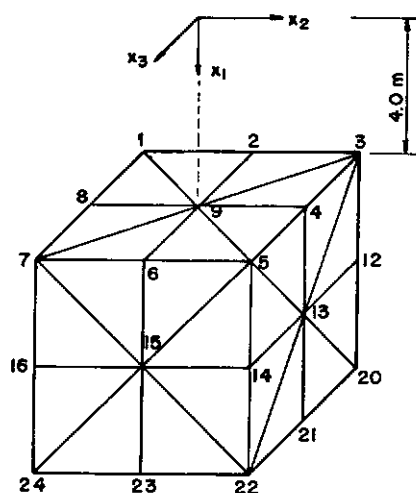


FIG.3a - MODELAGEM DO PROBLEMA - VÉRTICES DOS ELEMENTOS
PERSPECTIVA

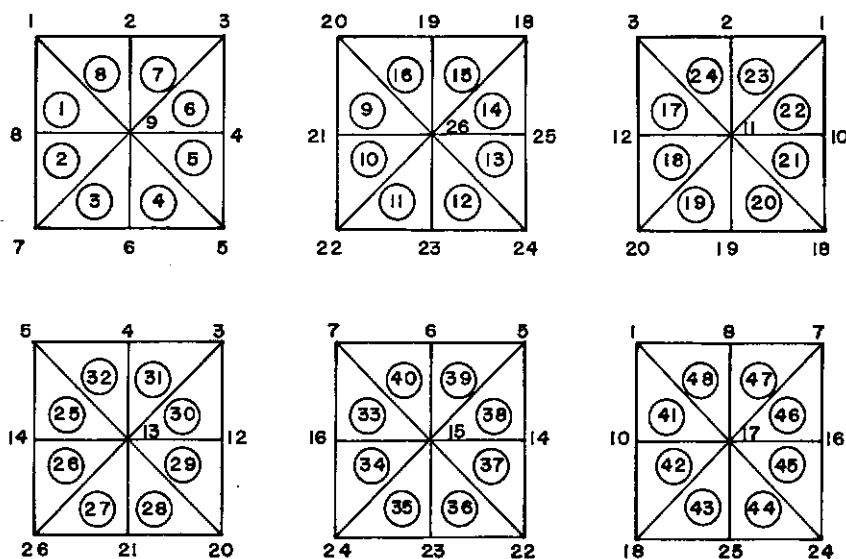


FIG. 3b— FACES DO CUBO VISTAS DE FORA

Na figura 3b está apresentada a numeração dos vértices dos elementos e dos nós dos mesmos, que estão contidos nos círculos.

V.2.3 - Análise dos Resultados

Os resultados analíticos para esse problema são apresentados, por exemplo, em [13] e foram comparados com os obtidos pelo programa nas tabelas a seguir. Por questão de clareza, são apresentados alguns pontos representativos do problema.

TABELA 1 - REAÇÕES DE APOIO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
9	- 100.00	- 100.38
10	- 100.00	- 99.86
11	- 100.00	- 99.86
12	- 100.00	- 100.38
13	- 100.00	- 99.70
14	- 100.00	- 100.29
15	- 100.00	- 100.29
16	- 100.00	- 99.70

TABELA 2 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO X DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1	0.0769	0.0776
3	0.0769	0.0776
5	0.0769	0.0778
7	0.0769	0.0777
23	0.0641	0.0648
22	0.0513	0.0504
34	0.0256	0.0269
43	0.0128	0.0132

TABELA 3 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO Y DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
25	0.0231	0.0249
27	0.0231	0.0251
29	0.0231	0.0244
31	0.0231	0.0251
21	0.0038	0.0034
23	0.0077	0.0082
16	0.0154	0.0154
38	0.0192	0.0216

TABELA 4 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO Z DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
33	0.0231	0.0249
36	0.0231	0.0251
34	0.0231	0.0244
40	0.0231	0.0251
42	0.0038	0.0034
48	0.0077	0.0082
13	0.0154	0.0154
25	0.0192	0.0216

TABELA 5 - LOCAÇÃO DOS PONTOS INTERNOS

<u>Ponto</u>	<u>Coord. X</u>	<u>Coord. Y</u>	<u>Coord. Z</u>
1	5.0000	0.0000	0.0000
2	5.0000	0.5000	0.5000
3	5.0000	0.5000	-0.5000
4	5.0000	-0.5000	0.5000
5	5.0000	-0.5000	-0.5000

TABELA 6 - DESLOCAMENTO DOS PONTOS INTERNOS

<u>Pto</u>	<u>Deslocamento X</u>		<u>Deslocamento Y</u>		<u>Deslocamento Z</u>	
	<u>Res.An.</u>	<u>Res.Pr.</u>	<u>Res.An.</u>	<u>Res.Pr.</u>	<u>Res.An.</u>	<u>Res.Pr.</u>
1	0.0385	0.0388	0.0116	0.0124	0.0116	0.0124
2	0.0385	0.0389	0.0173	0.0182	0.0173	0.0182
3	0.0385	0.0388	0.0173	0.0182	0.0058	0.0066
4	0.0385	0.0388	0.0058	0.0066	0.0173	0.0182
5	0.0385	0.0388	0.0058	0.0066	0.0058	0.0066

TABELA 7 - TENSÃO AXIAL (σ_{xx}) NOS PONTOS INTERNOS

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1	- 100.00	- 97.88
2	- 100.00	- 95.49
3	- 100.00	- 95.58
4	- 100.00	- 95.58
5	- 100.00	- 95.71

Considerando-se a utilização de elementos constantes e a discretização utilizada, os resultados obtidos podem ser qualificados como bem precisos, do ponto de vista de Engenharia.

V.3 - ANÁLISE DE UM CUBO TRACIONADO POR DUAS FACES OPOSTAS TEN DO UMA TERCEIRA FACE NA SUPERFÍCIE LIVRE

V.3.1 - Introdução

O objetivo deste exemplo é o de caracterizar a grande vantagem da utilização da formulação usada neste trabalho para problemas em que uma superfície não carregada do corpo em análise coincide com o plano limitante do semi-espço.

V.3.2 - Apresentação do Problema

O corpo utilizado nesta análise é exatamente o mesmo cubo do exemplo anterior, sendo que, neste caso, a face supe-

rior do cubo está na coordenada $x_1=0$. Além disso, para que esta face ficasse descarregada, aplicamos agora uma força de tração na direção x_2 . As constantes de material utilizadas foram as mesmas e os mesmos cuidados quando da imposição das restrições aos deslocamentos de corpo rígido foram tomados.

Para alcançar o objetivo deste exemplo, foi analisado também um outro cubo cuja única diferença consistiu na não discretização da face superior. Desta forma, diminuimos para 40 o nº de elementos de contorno, conseguindo razoável economia de esforço computacional.

V.3.3 - Análise dos Resultados

A comparação dos resultados obtidos pelo programa com os analíticos, apesar de ter sido efetuada, não será aqui apresentada por ser mera repetição daquela feita no primeiro exemplo. O que vale apenas ressaltar é a obtenção de igualdade, em todos os algarismos significativos impressos, entre os resultados das soluções com e sem discretização da face superior. Fato este já esperado e, confirmando o que foi exposto quando do desenvolvimento da formulação teórica.

V.4 - ANÁLISE DE UM SEMI-ESPAÇO SUBMETIDO A UM CARREGAMENTO UNIFORME SOBRE UMA ÁREA RETANGULAR NA SUPERFÍCIE

V.4.1 - Introdução

Este exemplo visa mostrar a aplicabilidade do método dentro de problemas mais reais de Engenharia. Pela natureza do problema escolhido ser aquela para a qual citamos ser a formulação proposta bastante adequada (semi-espacos infinitos), poderá ser avaliada aqui toda a facilidade e eficiência da aplicação do método. Em outras palavras, com poucos elementos para a discretização do corpo, necessitando, desta forma, não só um pequeno esforço computacional como também para preparação dos dados de entrada, poder-se-á obter resultados bastante precisos em todos os pontos de "contorno" e para tantos pontos internos quantos se queira.

V.4.2 - Apresentação do Problema

Para a análise deste caso, foi apenas discretizada com elementos de contorno a área carregada. Foram utilizados 32 elementos de contorno, tendo sido prescritas forças na direção x_1 com o valor de $1000. \text{ kN/m}^2$. Nenhum deslocamento precisou ser prescrito, visto que a formulação empregada se encarrega de prescrevê-los no "infinito". As constantes do material utilizado foram $G=100.000 \text{ kN/m}^2$ e $\nu=0.3$.

A figura abaixo, mostra a modelagem do problema, sendo que uma listagem com os dados de entrada deste exemplo encontra-se no Apêndice C e uma listagem com a saída do programa pode ser vista no Apêndice D.

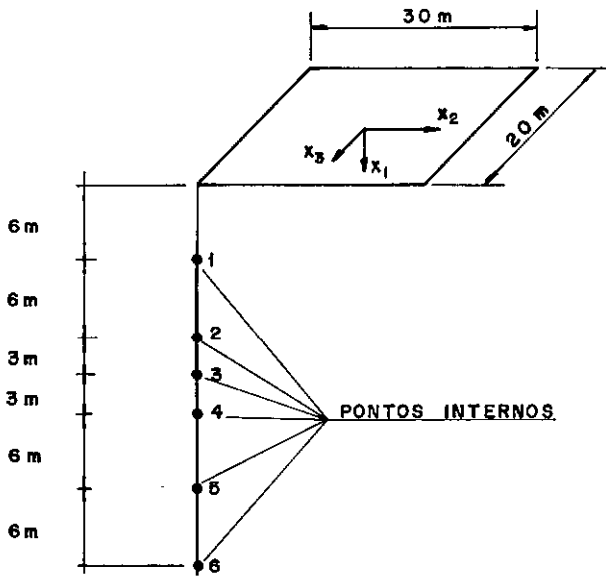


FIG. 4a - MODELAGEM DO PROBLEMA - PONTOS INTERNOS - PERSPECTIVA

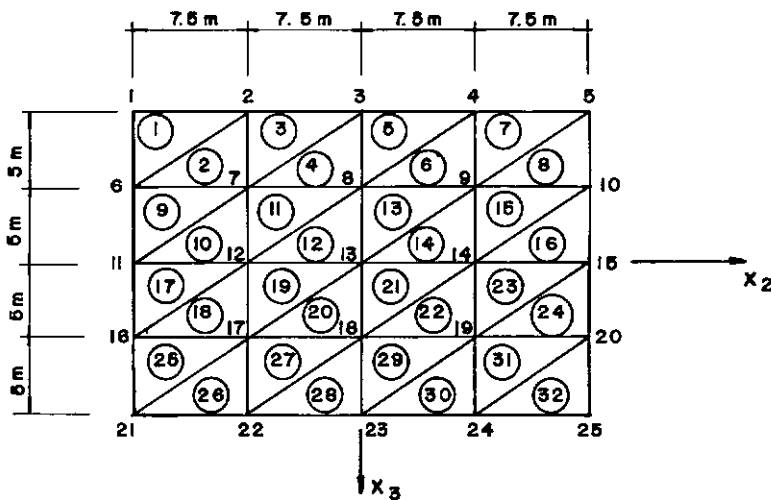


FIG. 4b - MODELAGEM DO PROBLEMA - ELEMENTOS DE CONTORNO
VISTA SUPERIOR

Os resultados analíticos para este problema podem ser encontrados em POULOS e DAVIS [14].

V.4.3 - Análise dos Resultados

Apresentamos nas tabelas abaixo a comparação entre os resultados obtidos pelo programa e os analíticos obtidos de [14]

TABELA 1 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO x_1 DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1	0.0661	0.0657
4	0.0853	0.0850
10	0.0848	0.0844
12	0.0940	0.0936
14	0.0924	0.0920
18	0.0833	0.0831
28	0.0793	0.0785
32	0.0661	0.0657

**TABELA 2 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO x_1 DOS PONTOS INTERNOS,
SITUADOS SOB UM VÉRTICE DO RETÂNGULO**

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1($x_1=6.0$)	0.04401	0.04403
2($x_1=12.$)	0.03988	0.03988
3($x_1=15.$)	0.03773	0.03774
4($x_1=18.$)	0.03563	0.03563
5($x_1=24.$)	0.03170	0.03170
6($x_1=30.$)	0.02825	0.02825

TABELA 3 - TENSÕES NORMAIS NOS PONTOS INTERNOS

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>			<u>Resultado do Programa</u>		
	<u>σ_{xx}</u>	<u>σ_{yy}</u>	<u>σ_{zz}</u>	<u>σ_{xx}</u>	<u>σ_{yy}</u>	<u>σ_{zz}</u>
1	-247.0	-129.8	-127.6	-246.9	-130.3	-127.8
2	-231.0	- 83.6	- 66.6	-230.9	- 83.3	- 66.9
3	-218.0	- 64.8	- 46.8	-218.2	- 65.0	- 46.7
4	-204.0	- 50.2	- 31.8	-203.7	- 50.2	- 32.1
5	-173.0	- 28.6	- 14.2	-173.4	- 29.0	- 14.2
6	-145.0	- 16.0	- 5.4	-145.1	- 16.3	- 5.4

Obs: Os resultados analíticos foram obtidos pelas fórmulas
(3.19) de [14].

TABELA 4 - TENSÕES CISALHANTES NOS PONTOS INTERNOS

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>		<u>Resultado do Programa</u>	
	<u>σ_{xy}</u>	<u>σ_{xz}</u>	<u>σ_{xy}</u>	<u>σ_{xz}</u>
1	149.1	-145.3	149.1	-145.3
2	124.9	-114.5	124.9	-114.5
3	111.0	- 98.3	111.0	- 98.3
4	97.4	- 83.5	97.4	- 83.5
5	73.2	- 59.2	73.2	- 59.2
6	54.4	- 42.1	54.4	- 42.1

Obs: Os resultados analíticos foram obtidos pelas fórmulas (3.18) de [14]. A tensão σ_{yz} não pode ser comparada, neste caso, por existir erro na fórmula a ela referente em [14], porém em outros casos não apresentados aqui essas tensões foram verificadas.

Os resultados acima confirmam a grande precisão do programa.

V.5 - ANÁLISE DE UM SEMI-ESPAÇO SUBMETIDO A UM CARREGAMENTO UNIFORME SOBRE UMA ÁREA CIRCULAR NA SUPERFÍCIE

V.5.1 - Introdução

Este exemplo é uma variação daquele apresentado no item V.4 deste capítulo. A diferença se caracteriza apenas pela

forma da área carregada, que aqui é circular.

V.5.2 - Apresentação do Problema

Neste caso, a área circular carregada foi discretizada com 32 elementos de contorno, tendo sido prescritas as forças na direção x_1 com valor de 1000 kN/m^2 . As constantes do material utilizado foram $G=100.000 \text{ kN/m}^2$ e $\nu=0.4$. A figura abaixo mostra a modelagem utilizada, onde a área circular foi aproximada por um hexadecágono inscrito ao círculo.

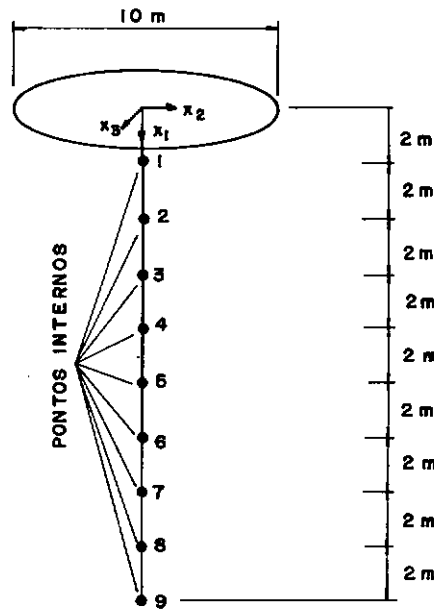


FIG. 5a - MODELAGEM DO PROBLEMA - PONTOS INTERNOS
PERSPECTIVA

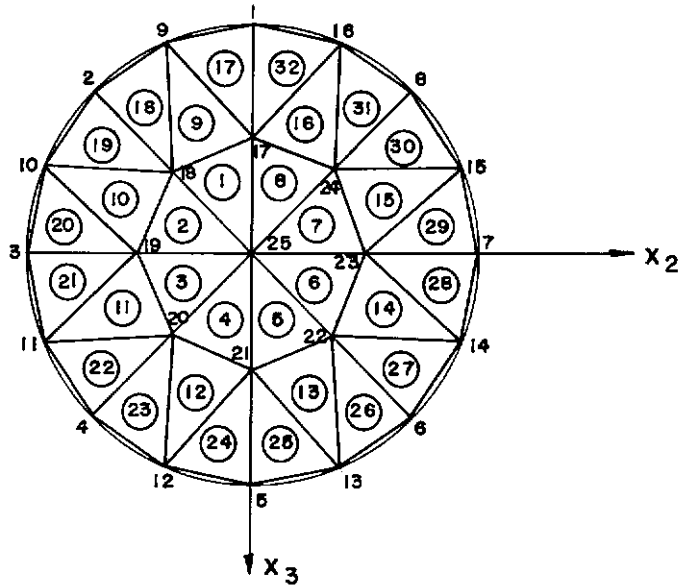


FIG. 5b - MODELAGEM DO PROBLEMA - ELEMENTOS DE CONTORNO - VISTA SUPERIOR

Os resultados analíticos para este problema podem ser encontrados em POULOS e DAVIS [14].

V.5.3 - Análise dos Resultados

Apresentamos nas tabelas a seguir a comparação dos resultados obtidos pelo programa com os analíticos calculados de acordo com [14].

TABELA 1 - DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO x_1 DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1	0.05837	0.05751
9	0.05305	0.05210
17	0.04782	0.04685

Obs: Devido à simetria do problema estes três nós caracterizam todo o contorno.

TABELA 2 - DESLOCAMENTOS RADIAIS HORIZONTAIS DOS NÓS DO CONTORNO

<u>Nó</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1	- 0.001541	- 0.001535
9	- 0.003208	- 0.003216
17	- 0.004090	- 0.004083

TABELA 3 - DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO x_1 DOS PONTOS INTERNOS SITUADOS SOB O CENTRO DA ÁREA CIRCULAR

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>	<u>Resultado do Programa</u>
1($x_1=2.$)	0.05723	0.05645
2($x_1=3.$)	0.05533	0.05455
3($x_1=4.$)	0.05319	0.05240
4($x_1=5.$)	0.05090	0.05010
5($x_1=6.$)	0.04854	0.04773
6($x_1=7.$)	0.04617	0.04537
7($x_1=8.$)	0.04385	0.04306
8($x_1=9.$)	0.04162	0.04084
9($x_1=10.$)	0.03950	0.03873

TABELA 4 - TENSÕES NORMAIS NOS PONTOS INTERNOS SITUADOS SOB O CENTRO DA ÁREA CIRCULAR

<u>Ponto</u>	<u>Resultado Analítico</u>		<u>Resultado do Programa</u>	
	<u>σ_{xx}</u>	<u>$\sigma_r = \sigma_\theta$</u>	<u>σ_{xx}</u>	<u>$\sigma_r = \sigma_\theta$</u>
1	-992.5	-629.2	-992.0	-625.7
2	-976.3	-509.6	-974.7	-505.5
3	-948.8	-405.7	-947.0	-400.8
4	-910.6	-318.5	-907.8	-313.6
5	-863.8	-247.8	-859.9	-242.9
6	-811.4	-191.4	-806.5	-187.0
7	-756.2	-147.3	-750.4	-143.4
8	-700.7	-113.1	-694.2	-109.7
9	-646.4	- 86.8	-639.6	- 83.9

Apesar da grande concordância entre os resultados, deve ser frisado o fato de os resultados obtidos pelo programa terem sido, quase sempre, menores que os analíticos. Isto se explica pelo fato do hexadecágono, usado como aproximação para a área circular, estar inscrito na mesma, ou seja, com área menor do que a real. E mais, a diferença entre os resultados nos pontos internos se torna maior, percentualmente, a medida em que o ponto se situa a uma profundidade maior, sofrendo assim maior infulência da aproximação efetuada.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Primeiramente, devemos salientar o motivo que nos levou a abordar o tema deste estudo. Existia a necessidade de se desenvolver um procedimento para o tratamento eficiente de problemas da elasticidade tridimensional quando o corpo em questão é um semi-espaco infinito, visto que, até o momento, apenas os deslocamentos dos pontos internos eram obtidos através do trabalho de NAKAGUMA [4]. Decidimos, seguindo a filosofia do que foi feito por TELLES e BREBBIA [2] para a elasticidade bidimensional, desenvolver o procedimento que nos levou à elaboração do programa BOUNDARY.

Nosso trabalho apresenta, então, a formulação completa para a solução com elementos de contorno de problemas de semi-espacos, com a utilização da solução fundamental de Mindlin. É evidente que o procedimento proposto é muito mais eficiente do que a discretização de semi-espacos usando elementos finitos tendendo ao infinito, ou mesmo elementos de contorno com a solução fundamental de Kelvin, que implicaria na definição de um contorno fechado.

Queremos frisar a grande economia que pode ser obtida em projetos de Engenharia que envolvam problemas deste tipo, devido a grande diminuição de esforço computacional proporcionada pelos procedimentos desenvolvidos. Vale lembrar que ho-

je em dia os gastos computacionais estão adquirindo fundamental importância dentro da composição final de custos de projetos. Exemplos de problemas de Engenharia que podem ser abordados de forma bastante eficiente estão apresentados no Capítulo I.

O trabalho aqui desenvolvido deve, entretanto, ser considerado como ponto de partida para novas implementações que podem tornar as análises ainda mais eficientes. Facilmente podem ser feitas implementações mais simples, como a da consideração de simetrias do corpo a ser analisado e a do processo de integração seletiva (já abordado anteriormente). Futuramente, poderá ser usado o conceito de sub-regiões (ver [7]) para permitir a utilização conjunta das soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin, possibilitando, em uma única análise, a solução de problemas de estruturas e solos (inclusive solos estratificados).

Finalmente, esperamos com nosso estudo, ter dado uma contribuição à essa linha de pesquisa onde são desenvolvidas formas cada vez mais eficientes e baratas de solucionar problemas de Engenharia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MINDLIN, R.D., Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid, Physics 7, 195-202, 1936.
- [2] TELLES, J.C. and BREBBIA, C.A., Boundary Element Solution for Half-Plane Problems, Int. J. Solids Structures, 17, 1149-1158, 1981.
- [3] MELAN, E., Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe, Z. Angew. Math. Mech., 12, 343-346, 1932.
- [4] NAKAGUMA, R.K., Three Dimensional Elastostatics Using the Boundary Element Method, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1979.
- [5] CAESTECKER, F., DHONDT, G. and WYNENDAELE, H., Short Communication: Concerning boundary elements - the Mindlin-formulas for stresses at internal points, Engineering Analysis, vol.1, n.3, 158-161, 1984.
- [6] SOMIGLIANA, C., Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo, Il Nuovo Cimento, 17-19, 1886.
- [7] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering, 1st ed., Springer-Verlag, 1984.

- [8] RICCARDELLA, P.C., An Implementation of the Boundary
Integral Technique for Planar Problems in
Elasticity and Elastoplasticity, Report No. SM-
73-10, Dept. Mech Engng., Carnegie Mellon Univ.,
Pittsburg, 1973.

- [9] HARTMANN, F., Computing de C-Matrix in Non-smooth Boundary
Points, in New Developments in Boundary Element
Methods (C.A.Brebbia, Ed.), pp 367-379, Butter-
worths, London, 1980. CML Southampton, 1983.

- [10] TELLES, J.C.F., The Boundary Element Method Applied to
Inelastic Problems, Lecture Notes in Engineering,
Springer-Verlag, 1983.

- [11] HAMMER, P. C., MARLOWE, O.J., and STROUD, A.H., Numerical
Integration over Simplexes and Cones, Math.
Tables Other Aids Comput., 10, 130-139, 1956.

- [12] BATHE, K.J., Finite Element Procedures in Engineering
Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,
USA, 1982.

- [13] TIMOSHENKO, S.P., e GOODIER, J.N., Teoria da Elasticidade,
Edit. Guanabara Dois S.A., 1980.

- [14] POULOS, H.G. and DAVIS, E.H., Elastic Solutions for Soil
and Rock Mechanics, Wiley, New York, 1974.

APÊNDICE A

EXPRESSÕES DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

A partir das definições apresentadas junto com a figura abaixo, estão mostradas a seguir as expressões da solução fundamental de Mindlin de acordo com [1]

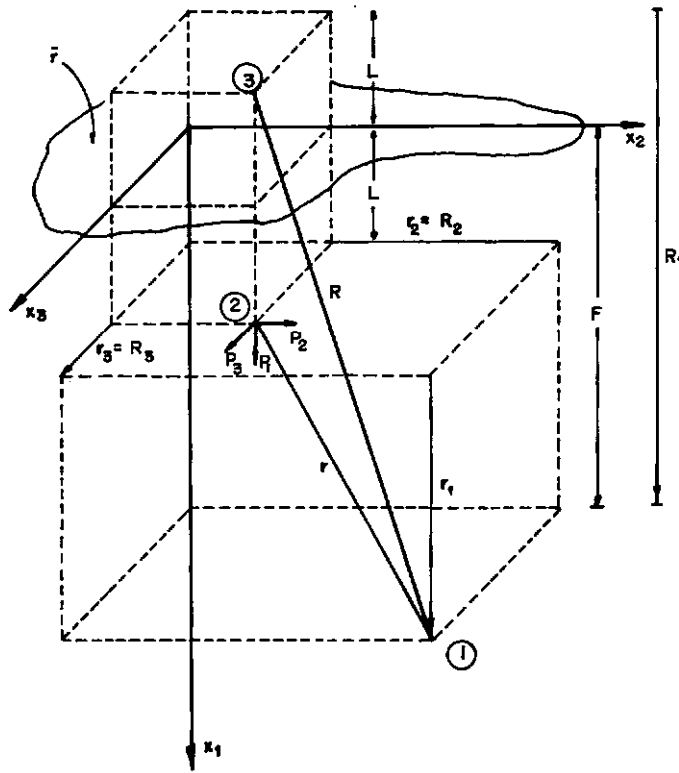


FIG. 6 - CARGAS UNITÁRIAS APLICADAS NO INTERIOR DO SEMI-ESPAÇO

$$u_{11}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{r} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(F-L)^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)(F+L)^2 - 2FL}{R^3} + \frac{6FL(F+L)^2}{R^5} \right]$$

$$u_{12}^* = \frac{X_2(1) - X_2(2)}{16\pi G(1 - \nu)} \left[\frac{F - L}{r^3} + \frac{(3 - 4\nu)(F - L)}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)} + \frac{6LF(F + L)}{R^5} \right]$$

$$u_{13}^* = \frac{X_3(1) - X_3(2)}{X_2(1) - X_2(2)} u_{12}^*$$

$$u_{21}^* = \frac{X_2(1) - X_2(2)}{16\pi G(1 - \nu)} \left[\frac{F - L}{r^3} + \frac{(3 - 4\nu)(F - L)}{R^3} - \frac{6FL(F + L)}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)} \right]$$

$$u_{22}^* = \frac{1}{16\pi G(1 - \nu)} \left\{ \frac{3 - 4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2}{r^3} + \right. \\ \left. + \frac{(3 - 4\nu)[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^3} + \frac{2FL}{R^3} \left[1 - \frac{3[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R + F + L} \left\{ 1 - \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R(R+F+L)} \right\} \right\}$$

$$u_{23}^* = \frac{[X3(1) - X3(2)][X2(1) - X2(2)]}{16\pi G(1 - \nu)} \left[\frac{1}{r^3} + \frac{3 - 4\nu}{R^3} - \frac{6FL}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \right]$$

$$u_{31}^* = \frac{X3(1) - X3(2)}{X2(1) - X2(2)} u_{21}^*$$

$$u_{32}^* = u_{23}^*$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{16\pi G(1 - \nu)} \left\{ \frac{(3 - 4\nu)}{r} + \frac{1}{R} + \frac{[X3(1) - X3(2)]^2}{r^3} + \right. \\ \left. + \frac{(3 - 4\nu)[X3(1) - X3(2)]^2}{R^3} + \frac{2FL}{R^3} \left\{ 1 - \frac{3[X3(1) - X3(2)]^2}{R^2} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R + F + L} \left\{ 1 - \frac{[X3(1) - X3(2)]^2}{R(R+F+L)} \right\} \right\}$$

$$\sigma_{111}^* = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} \left[- \frac{(1 - 2\nu)(F-L)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)(F-L)}{R^3} - \frac{3(F-L)^3}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{3(3 - 4\nu)F(F+L)^2}{R^5} - \frac{3L(F+L)(5F-L)}{R^7} - \frac{30FL(F+L)^3}{R^7} \right]$$

$$\sigma_{112}^* = \frac{[X_2(1) - X_2(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left[-\frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)}{R^3} - \frac{3(F-L)^2}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{3(3 - 4\nu)F(F+L) - 3L(3F+L)(5F-L)}{R^5} - \frac{30FL(F+L)^2}{R^7} \right]$$

$$\sigma_{113}^* = \frac{X_3(1) - X_3(2)}{X_2(1) - X_2(2)} \sigma_{112}^*$$

$$\sigma_{121}^* = \sigma_{112}^*$$

$$\sigma_{122}^* = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)(F-L)}{r^3} - \frac{3[X_2(1) - X_2(2)]^2(F-L)}{r^5} + \right. \\ + \frac{(1 - 2\nu)[3(F-L) - 4\nu(F+L)]}{R^3} - \frac{30L[X_2(1) - X_2(2)]^2 F(F+L)}{R^7} + \\ - \frac{3(3 - 4\nu)[X_2(1) - X_2(2)]^2(F-L) - 6L(F+L)[(1 - 2\nu)F - 2\nu L]}{R^5} \\ \left. - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)} \left\{ 1 - \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R(R+F+L)} - \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^2} \right\} \right\}$$

$$\sigma_{123}^* = \frac{[X_2(1) - X_2(2)][X_3(1) - X_3(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left[-\frac{3(F-L)}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)(F-L)}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^2(R+F+L)} \left(\frac{1}{R+F+L} + \frac{1}{R} \right) - \frac{30FL(F+L)}{R^7} \right]$$

$$\sigma_{131}^* = \sigma_{113}^*$$

$$\sigma_{132}^* = \sigma_{123}^*$$

$$\sigma_{133}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)(F-L)}{r^3} - \frac{3[X_3(1) - X_3(2)]^2(F-L)}{r^5} + \right. \\ + \frac{(1-2\nu)[3(F-L) - 4\nu(F+L)]}{R^3} - \frac{30L[X_3(1) - X_3(2)]^2 F(F+L)}{R^7} + \\ - \frac{3(3-4\nu)[X_3(1) - X_3(2)]^2(F-L) - 6L(F+L)[(1-2\nu)F - 2\nu L]}{R^5} \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+F+L)} \left\{ 1 - \frac{[X_3(1) - X_3(2)]^2}{R(R+F+L)} - \frac{[X_3(1) - X_3(2)]^2}{R^2} \right\} \right\}$$

$$\sigma_{211}^* = \frac{[X_2(1) - X_2(2)]}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{(1-2\nu)}{R^3} - \frac{3(F-L)^2}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\nu)(F+L)^2}{R^5} + \frac{6L}{R^5} \left[L + (1-2\nu)(F-L) + \frac{5F(F+L)^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{212}^* = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(1-2\nu)(F-L)}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(F-L)}{R^3} + \right. \\ & - \frac{3[X_2(1) - X_2(2)]^2(F-L)}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)[X_2(1)-X_2(2)]^2(F+L)}{R^5} + \\ & - \frac{6L}{R^5} \left\{ F(F+L) - (1-2\nu)[X_2(1) - X_2(2)]^2 + \right. \\ & \left. \left. - \frac{5[X_2(1) - X_2(2)]^2 F(F+L)}{R^2} \right\} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{213}^* = & \frac{[X_2(1) - X_2(2)][X_3(1) - X_3(2)]}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{3(F-L)}{r^5} + \right. \\ & \left. - \frac{3(3-4\nu)(F+L)}{R^5} + \frac{6L}{R^5} \left[1 - 2\nu + \frac{5F(F+L)}{R^2} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\sigma_{221}^* = \sigma_{212}^*$$

$$\begin{aligned}\sigma_{222}^* = & \frac{[X_2(1) - X_2(2)]}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(1-2\nu)}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} + \right. \\ & - \frac{3[X_2(1) - X_2(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^5} + \\ & \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+F+L)^2} \left[3 - \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right] \right\} +\end{aligned}$$

$$+ \frac{6L}{R^5} \left\{ 3L - (3 - 2\nu)(F+L) + \frac{5F[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{223}^* &= \frac{[X_3(1) - X_3(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ - \frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)}{R^3} + \right. \\ &\quad - \frac{3[X_2(1) - X_2(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^5} + \\ &\quad - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{[X_2(1) - X_2(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right\} + \\ &\quad \left. - \frac{6FL}{R^5} \left\{ 1 - \frac{5[X_2(1) - X_2(2)]^2}{R^2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{231}^* = \sigma_{213}^*$$

$$\sigma_{232}^* = \sigma_{223}^*$$

$$\begin{aligned} \sigma_{233}^* &= \frac{[X_2(1) - X_2(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)(3 - 4\nu)}{R^3} + \right. \\ &\quad - \frac{3[X_3(1) - X_3(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X_3(1) - X_3(2)]^2}{R^5} + \\ &\quad \left. + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{[X3(1) - X3(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right\} + \frac{6L}{R^5} \cdot$$

$$\cdot \left\{ L - (1 - 2\nu)(F+L) + \frac{5[X3(1) - X3(2)]^2 F}{R^2} \right\}$$

$$\sigma_{311}^* = \frac{X3(1) - X3(2)}{X2(1) - X2(2)} \cdot \sigma_{211}^*$$

$$\sigma_{312}^* = \sigma_{213}^*$$

$$\begin{aligned} \sigma_{313}^* = & \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ - \frac{(1 - 2\nu)(F-L)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)(F-L)}{R^3} + \right. \\ & - \frac{3[X3(1) - X3(2)]^2(F-L)}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X3(1) - X3(2)]^2(F+L)}{R^5} + \\ & - \frac{6L}{R^5} \left\{ F(F+L) - (1 - 2\nu)[X3(1) - X3(2)]^2 + \right. \\ & \left. \left. - \frac{5[X3(1) - X3(2)]^2 F(F+L)}{R^2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{321}^* = \sigma_{312}^*$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{322}^* &= \frac{[X3(1) - X3(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)(3 - 4\nu)}{R^3} + \right. \\
&\quad - \frac{3[X3(1) - X2(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X2(1) - X2(2)]^2}{R^5} + \\
&\quad - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{[X2(1) - X2(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right\} + \frac{6L}{R^5} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ L - (1 - 2\nu)(F+L) + \frac{5[X2(1) - X2(2)]^2 F}{R^2} \right\} \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{323}^* &= \frac{[X2(1) - X2(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ - \frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)}{R^3} + \right. \\
&\quad - \frac{3[X3(1) - X3(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X3(1) - X3(2)]^2}{R^5} + \\
&\quad - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{[X3(1) - X3(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right\} - \frac{6FL}{R^5} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{5[X3(1) - X3(2)]^2}{R^2} \right\} \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{331}^* = \sigma_{313}^*$$

$$\sigma_{332}^* = \sigma_{323}^*$$

$$\begin{aligned} \sigma_{333}^* = & \frac{[X3(1) - X3(2)]}{8\pi(1 - \nu)} \left\{ -\frac{(1 - 2\nu)}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu)(5 - 4\nu)}{R^3} + \right. \\ & - \frac{3[X3(1) - X3(2)]^2}{r^5} - \frac{3(3 - 4\nu)[X3(1) - X3(2)]^2}{R^5} + \\ & - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R(R+F+L)^2} \cdot \\ & \cdot \left\{ 3 - \frac{[X3(1) - X3(2)]^2(3R+F+L)}{R^2(R+F+L)} \right\} + \frac{6L}{R^5} \cdot \\ & \cdot \left\{ 3L - (3 - 2\nu)(F+L) + \frac{5F[X3(1) - X3(2)]^2}{R^2} \right\} \end{aligned}$$

APÊNDICE B

EXPRESSÕES DAS DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

A partir das definições apresentadas junto com a figura do Apêndice A, adicionadas às apresentadas abaixo, estão mostradas a seguir as expressões das derivadas da solução fundamental de Mindlin de acordo [5]. Note-se que já foi corrigido o erro encontrado na expressão $u_{12,i}^*$ (para nosso sistema de coordenadas).

$$K_d = \frac{1 + \nu}{8\pi E(1 - \nu)}$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)}$$

$$r_i = x_i(1) - x_i(2)$$

$$R_i = x_i(1) - x_i(3)$$

$$A_1 = 1 - 2\nu$$

$$A_2 = 3 - 4\nu$$

$$A_3 = 1 - \nu$$

Expressões preliminares

$$D_i = 2\delta_{1i} - 1$$

$$r_{,i} = -\frac{r_i}{r}$$

$$R_{,i} = \frac{R_i}{R} (2\delta_{1i} - 1)$$

$$r_{j,i} = -\delta_{ij}$$

$$R_{j,i} = \delta_{ij} (2\delta_{j1} - 1)$$

$$L_{,i} = \delta_{1i}$$

$$F_{,i} = 0$$

$$C_1(i,j) = \frac{6r_j \delta_{ji}}{r^5} - \frac{15r_j^2 r_i}{r^7}$$

$$C_2(i,j) = \frac{6A_2 r_j \delta_{ij}}{R^5} + \frac{15A_2 r_j^2 R_i D_j}{R^7}$$

$$C_3(i,j,k) = \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_1)^4} \left[k - \frac{r_j^2 (3R+R_1)}{R^2 (R+R_1)} \right] \cdot \left[\frac{R_i D_j}{R} (R+R_1)^2 + \right. \\ \left. + 2R(R+R_1) \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] - \frac{4A_3 A_1}{R(R+R_1)^2} \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{2r_j(3R+R_1)\delta_{ij} - r_j^2((3R_i D_i/R) + \delta_{1i})}{R^2(R+R_1)} + \frac{r_j^2(3R+R_1)}{R^4(R+R_1)^2} \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left[2R_i D_i(R+R_1) + R^2 \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4(i, j, k, l, m) = & \left[\frac{6\delta_{1i}}{R^5} - \frac{30LR_i D_i}{R^7} \right] \left[mL - (k-l\nu)R_1 + \right. \\
& + \frac{5r_j^2 F}{R^2} \left. \right] + \frac{6L}{R^5} \left[m\delta_{1i} - (k-l\nu)\delta_{1i} - \frac{10r_j^2 F \delta_{ij}}{R^2} + \right. \\
& - \left. \frac{10r_j^2 F R_i D_i}{R^4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5(i, j) = & \left[-\frac{6\delta_{1i} F}{R^5} + \frac{30LFR_i D_i}{R^7} \right] \left[1 - \frac{5r_j^2}{R^2} \right] + \\
& - \frac{6LF}{R^5} \left[\frac{10r_j^2 \delta_{ij}}{R^2} + \frac{10r_j^2 R_i D_i}{R^4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_6(i, j) = & \left[-\frac{6\delta_{1i}}{R^5} + \frac{30LR_i D_i}{R^7} \right] \left[FR_1 - A_1 r_j^2 - \frac{5r_j^2 FR_1}{R^2} \right] + \\
& - \frac{6L}{R^5} \left[F\delta_{1i} + 2A_1 r_j^2 \delta_{ij} + \frac{10r_j^2 FR_1 \delta_{ij}}{R^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$- \frac{5r_j^2 F \delta_{1i}}{R^2} + \frac{10r_j^2 F R_1 R_i D_i}{R^4} \Bigg]$$

$$C_7(i, j) = \frac{6r_j r_1 \delta_{ij}}{r^5} + \frac{3r_j^2 \delta_{1i}}{r^5} - \frac{15r_j^2 r_1 r_i}{r^7}$$

$$C_8(i, j) = \frac{6A_2 r_j r_1 \delta_{ij} + 3A_2 r_j^2 \delta_{1i}}{R^5} - \frac{12LR_1 v \delta_{1i}}{R^5} +$$

$$+ \frac{6(R_1 + L) \delta_{1i} (A_1 F - 2vL)}{R^5} +$$

$$+ \frac{5(3A_2 r_j^2 r_1 - 6LR_1 (A_1 F - 2vL)) R_i D_i}{R^7}$$

$$C_9(i, j) = \frac{-30\delta_{1i} r_j^2 F R_1 - 30L r_j^2 F \delta_{1i} + 60L r_j F R_1 \delta_{ij}}{R^7} +$$

$$+ \frac{(210L r_j^2 F R_1) R_i D_i}{R^9}$$

$$C_{10}(i, j) = \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R + R_1)^2} \left[1 - \frac{r_j^2}{R(R + R_1)} - \frac{r_j^2}{R^2} \right] \left[\frac{R_i D_i}{R} (R + R_1) + \right.$$

$$\left. + R \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] - \frac{4A_3 A_1}{R(R + R_1)} \left[\frac{2r_j \delta_{ij}}{R(R + R_1)} + \right.$$

$$+ \frac{r_j^2}{R^2(R+R_1)^2} \left[\frac{R_i D_i}{R} (R+R_1) + R \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] +$$

$$+ \frac{2r_j \delta_{ij}}{R^2} + \frac{2r_j^2 R_i D_i}{R^4} \Bigg]$$

Derivadas da Solução Fundamental

$$u_{11,i}^* = K_d \left[\frac{A_2 r_i}{r^3} - \frac{(8A_3^2 - A_2) R_i D_i}{R^3} - \frac{2r_1 \delta_{1i}}{r^3} + \frac{3r_1^2 r_i}{r^5} + \right.$$

$$+ \frac{2A_2 R_1 \delta_{1i}}{R^3} - \frac{3(A_2 R_1^2 - 2LF) R_i D_i}{R^5} + \frac{12LFR_1 \delta_{1i}}{R^5} +$$

$$\left. - \frac{30LFR_1^2 R_i D_i}{R^7} - \frac{2\delta_{1i} F}{R^3} + \frac{6\delta_{1i} FR_1^2}{R^5} \right]$$

$$u_{12,i}^* = -u_{12}^* \frac{\delta_{2i}}{r_2} + K_d r_2 \left\{ -\frac{\delta_{1i}}{r^3} + \frac{3r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_2 \delta_{1i}}{R^3} + \right.$$

$$- \frac{3A_2 r_1 R_i D_i}{R^5} + \frac{4A_3 A_1}{R^2(R+R_1)^2} \left[\frac{R_i D_i}{R} (2R+R_1) + R\delta_{1i} \right] +$$

$$\left. + \frac{6LF\delta_{1i}}{R^5} - \frac{30LFR_1 R_i D_i}{R^7} + \frac{6\delta_{1i} FR_1}{R^5} \right\}$$

$$u_{13,i}^* = \frac{r_3}{r_2} u_{12,i}^* + u_{12}^* \left(\delta_{2i} \frac{r_3}{r_2^2} - \frac{\delta_{3i}}{r_2} \right)$$

$$u_{21,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} u_{21}^* + K_d r_2 \left\{ -\frac{\delta_{1i}}{r^3} + \frac{3r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_2 \delta_{1i}}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3A_2 r_1 R_i D_i}{R^5} - \frac{6LF \delta_{1i}}{R^5} + \frac{30LFR_1 R_i D_i}{R^7} - \frac{6\delta_{1i} FR_1}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_1)^2} \left[\frac{R_i D_i}{R} (R+R_1) + R \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] \right\}$$

$$u_{22,i}^* = K_d \left\{ \frac{A_2 r_i}{r^3} - \frac{R_i D_i}{R^3} - \frac{2r_2 \delta_{2i}}{r^3} + \frac{3r_2^2 r_i}{r^5} - \frac{2A_2 r_2 \delta_{2i}}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3A_2 r_2^2 R_i D_i}{R^5} - \frac{6LFR_i D_i}{R^5} \left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{12LFR_2 \delta_{2i}}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{12LFR_2^2 R_i D_i}{R^7} - \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_1)} \right] \frac{4A_3 A_1}{(R+R_1)^2} \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4A_3 A_1}{R(R+R_1)^2} \left\{ 2r_2 \delta_{2i} + \frac{r_2^2}{R(R+R_1)} \left[\frac{R_i D_i}{R} (2R+R_1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + R \delta_{1i} \right] \right\} + \frac{2\delta_{1i} F}{R^3} \left[1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$u_{23,i}^* = - u_{23}^* \left\{ \frac{\delta_{2i}}{r_2} + \frac{\delta_{3i}}{r_3} \right\} + K_d r_2 r_3 \left\{ \frac{3r_i}{r^5} - \frac{3A_2 R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{30LFR_i D_i}{R^7} + \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_1)^3} \left[\frac{R_i D_i}{R} (R+R_1) + 2R \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{6\delta_{1i} F}{R^5} \right\}$$

$$u_{31,i}^* = \frac{r_3}{r_2} u_{21,i}^* + u_{21}^* \left(\delta_{2i} \frac{r_3}{r_2^2} - \frac{\delta_{3i}}{r_2} \right)$$

$$u_{32,i}^* = u_{23,i}^*$$

$$u_{33,i}^* = K_d \left\{ \frac{A_2 r_i}{r^3} - \frac{R_i D_i}{R^3} - \frac{2\delta_{3i} r_3}{r^3} + \frac{3r_3^2 r_i}{r^5} - \frac{2A_2 r_3 \delta_{3i}}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3A_2 r_3^2 R_i D_i}{R^5} - \frac{6LFR_i D_i}{R^5} \left(1 - \frac{3r_3^2}{R^2} \right) + \frac{2LF}{R^3} \right. \\ \cdot \left(\frac{6r_3 \delta_{3i}}{R^2} + \frac{6r_3^2 R_i D_i}{R^4} \right) - \frac{4A_3 A_1}{(R+R_1)^2} \left[1 - \frac{r_3^2}{R(R+R_1)} \right] \cdot \\ \cdot \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) + \frac{4A_3 A_1}{(R+R_1)^2} R \left\{ 2r_3 \delta_{3i} + \frac{r_3^2}{R(R+R_1)} \right. \\ \cdot \left. \left[\frac{R_i D_i}{R} (2R+R_1) + R\delta_{1i} \right] \right\} + \frac{2\delta_{1i} F}{R^3} \left(1 - \frac{3r_3^2}{R^2} \right) \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{111,i}^* = K_s \left\{ \frac{A_1 \delta_{1i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{1i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_1 R_i D_i}{R^5} + \right. \\
+ \frac{9r_i^2 \delta_{1i}}{r^5} - \frac{15r_1^3 r_i}{r^7} + \frac{210LFR_1^3 R_i D_i}{R^9} + \\
- \frac{6A_2 FR_1 \delta_{1i} - 3(R_1 + L) \delta_{1i} (5F - L) + 3LR_1 \delta_{1i}}{R^5} + \\
\left. + \frac{5[3A_2 FR_1^2 - 3LR_1 (5F - L)] R_i D_i}{R^7} - \frac{30FR_1^3 \delta_{1i} + 90LFR_1^2 \delta_{1i}}{R^7} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{112,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{112}^* + K_s r_2 \left\{ -\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D_i}{R^5} + \right. \\
+ C_1(i, 1) - \frac{3A_2 F \delta_{1i} - 3\delta_{1i} (3F + 2L)}{R^5} + \\
+ \frac{210LFR_1^2 R_i D_i}{R^9} + \frac{5[3A_2 FR_1 - 3L(3F + L)] R_i D_i}{R^7} + \\
\left. - \frac{30\delta_{1i} FR_1^2 + 60LFR_1 \delta_{1i}}{R^7} \right\}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{113,i}^* = \frac{r_3}{r_2} \sigma_{112,i}^* + \sigma_{112}^* \left(\delta_{2i} \frac{r_3}{r_2^2} - \frac{\delta_{3i}}{r_2} \right)$$

$$\sigma_{121,i}^* = \sigma_{112,i}^*$$

$$\sigma_{122,i}^* = K_s \left[-\frac{A_1 \delta_{1i}}{r^3} + \frac{3A_1 r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_1 (3+4\nu) \delta_{1i}}{R^3} + C_7(i,2) + \right. \\ \left. - \frac{3A_1 (3r_1 - 4\nu R_1) R_i D_i}{R^5} + C_8(i,2) + C_9(i,2) + C_{10}(i,2) \right]$$

$$\sigma_{123,i}^* = \left(-\frac{\delta_{2i}}{r_2} - \frac{\delta_{3i}}{r_3} \right) \sigma_{123}^* + K_s r_2 r_3 \left\{ \frac{3\delta_{1i}}{r^5} - \frac{15r_1 r_i}{r^7} + \right. \\ \left. + \frac{3A_2 \delta_{1i}}{R^5} + \frac{15A_2 r_1 R_i D_i}{R^7} - \frac{30F \delta_{1i} (R_1 + L)}{R^7} + \frac{210LFR_1 R_i D_i}{R^9} + \right. \\ \left. + \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_1)} \left\{ -\frac{[(R_i/R) D_i + \delta_{1i}]}{(R+R_1)^2} - \frac{R_i D_i}{R^3} \right\} - \frac{4A_3 A_1}{R^4 (R+R_1)^2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{1}{R+R_1} + \frac{1}{R} \right) \left[2R_i D_i (R+R_1) + R^2 \left(\frac{R_i D_i}{R} + \delta_{1i} \right) \right] \right\}$$

$$\sigma_{131,i}^* \quad \sigma_{113,i}^*$$

$$\sigma_{132,i}^* \quad \sigma_{123,i}^*$$

$$\sigma_{133,i}^* = K_s \left[-\frac{A_1 \delta_{1i}}{r^3} + \frac{3A_1 r_1 r_i}{r^5} + C_7(i,3) - \frac{A_1 (3+4\nu) \delta_{1i}}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3A_1 (3r_1 - 4\nu R_1) R_i D_i}{R^5} + C_8(i,3) + C_9(i,3) + C_{10}(i,3) \right]$$

$$\sigma_{211,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{211}^* + K_s r_2 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} + \frac{3A_1 R_i D_i}{R^5} + C_1(i,1) + \right. \\ \left. - \frac{6A_2 R_1 \delta_{1i}}{R^5} + \frac{15A_2 R_1^2 R_i D_i}{R^7} + \left(\frac{6\delta_{1i}}{R^5} - \frac{30LR_i D_i}{R^7} \right) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[L + A_1 R_1 + \frac{5FR_1^2}{R^2} \right] + \frac{6L}{R^5} \left[\delta_{1i} + A_1 \delta_{1i} + \right. \\ \left. + \frac{10FR_1 \delta_{1i}}{R^2} - \frac{10FR_1^2 D_i R_i}{R^4} \right]$$

$$\sigma_{212,i}^* = K_s \left[\frac{A_1 \delta_{1i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{1i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_1 R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{3r_2^2 \delta_{1i}}{r^5} + r_1 C_1(i,2) - \frac{3A_2 r_2^2 \delta_{1i}}{R^5} + R_1 C_2(i,2) + C_6(i,2) \right]$$

$$\sigma_{213,i}^* = \left(-\frac{\delta_{2i}}{r_2} - \frac{\delta_{3i}}{r_3} \right) \sigma_{213}^* + K_s r_2 r_3 \left[\frac{3\delta_{1i}}{r^5} - \frac{15r_1 r_i}{r^7} + \right. \\ \left. - \frac{3A_2 \delta_{1i}}{R^5} + \frac{15A_2 R_1 R_i D_i}{R^7} + \left(\frac{6\delta_{1i}}{R^5} - \frac{30LR_i D_i}{R^7} \right) \right] \cdot$$

$$\left(A_1 + \frac{5FR_1}{R^2} \right) + \frac{6L}{R^5} \left[\frac{5F\delta_{1i}}{R^2} - \frac{10FR_1 R_i D_i}{R^4} \right]$$

$$\sigma_{221,i}^* = \sigma_{212,i}^*$$

$$\sigma_{222,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{222}^* + K_s r_2 \left[-\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 (5-4\nu) R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. + C_1(i,2) + C_2(i,2) + C_3(i,2,3) + C_4(i,2,3,2,3) \right]$$

$$\sigma_{223,i}^* = -\frac{\delta_{3i}}{r_3} \sigma_{223}^* + K_s r_3 \left[-\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D_i}{R^5} + C_1(i,2) + C_2(i,2) + C_3(i,2,1) + C_5(i,2) \right]$$

$$\sigma_{231,i}^* = \sigma_{213,i}^*$$

$$\sigma_{232,i}^* = \sigma_{223,i}^*$$

$$\sigma_{233,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{233}^* + K_s r_2 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 A_2 R_i D_i}{R^5} + C_1(i,3) + C_2(i,3) + C_3(i,3,1) + C_4(i,3,1,2,1) \right]$$

$$\sigma_{311,i}^* = \frac{r_3}{r_2} \sigma_{211,i}^* + \sigma_{211}^* \left(\delta_{2i} \frac{r_3}{r_2^2} - \frac{\delta_{3i}}{r_2} \right)$$

$$\sigma_{312,i}^* = \sigma_{231,i}^*$$

$$\sigma_{313,i}^* = K_s \left[\frac{A_1 \delta_{1i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_1 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{1i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_1 R_i D_i}{R^5} + C_7(i,3) - \frac{3A_2 r_3^2 \delta_{1i}}{R^5} + R_1 C_2(i,3) + C_6(i,3) \right]$$

$$\sigma_{321,i}^* = \sigma_{312,i}^*$$

$$\sigma_{322,i}^* = -\frac{\delta_{3i}}{r_3} \sigma_{322}^* + K_s r_3 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 A_2 R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. + C_1(i,2) + C_2(i,2) + C_3(i,2,1) + C_4(i,2,1,2,1) \right]$$

$$\sigma_{323,i}^* = -\frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{323}^* + K_s r_2 \left[-\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. + C_1(i,3) + C_2(i,3) + C_3(1,3,1) + C_5(i,3) \right]$$

$$\sigma_{331,i}^* = \sigma_{313,i}^*$$

$$\sigma_{332,i}^* = \sigma_{323,i}^*$$

$$\sigma_{333,i}^* = -\frac{\delta_{3i}}{r_3} \sigma_{333}^* + K_s r_3 \left[-\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 (5-4\nu) R_i D_i}{R^5} + \right. \\ \left. + C_1(i,3) + C_2(i,3) + C_3(i,3,3) + C_4(i,3,3,2,3) \right]$$

APÊNDICE C

DADOS DE ENTRADA PARA O PROGRAMA BOUNDARY
RELATIVOS AO EXEMPLO DO ITEM 4. DO CAPÍTULO V

123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

25 32 6
*** EXEMPLG POULGS PAG. 54 ***

100000.	0.3		
10.	-15.	-10.	
20.	-7.5	-10.	
30.	0.	-10.	
40.	7.5	-10.	
50.	15.	-10.	
60.	-15.	-5.	
70.	-7.5	-5.	
80.	0.	-5.	
90.	7.5	-5.	
100.	15.	-5.	
110.	-15.	0.	
120.	-7.5	0.	
130.	0.	0.	
140.	7.5	0.	
150.	15.	0.	
160.	-15.	5.	
170.	-7.5	5.	
180.	0.	5.	
190.	7.5	5.	
200.	15.	5.	
210.	-15.	10.	
220.	-7.5	10.	
230.	0.	10.	
240.	7.5	10.	
250.	15.	10.	
16.0	-15.	10.	
212.	-15.	10.	
315.	-15.	10.	
418.	-15.	10.	
524.	-15.	10.	
630.	-15.	10.	

1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890				
01	02	01	06	06
02	02	06	07	07
03	03	02	07	08
04	03	07	08	08
05	04	03	08	09
06	04	08	09	09
07	05	04	09	10
08	05	09	10	11
09	07	06	11	12
10	07	11	12	12
11	08	07	12	13
12	08	12	13	13
13	09	08	13	14
14	09	13	14	14
15	10	09	14	15
16	10	14	15	16
17	12	11	16	17
18	12	16	17	17
19	13	12	18	18
20	13	17	18	19
21	14	13	19	20
22	14	18	20	21
23	15	14	21	22
24	15	19	22	22
25	17	16	23	23
26	17	21	24	24
27	18	17	25	25
28	18	22		
29	19	18		
30	19	23		
31	20	19		
32	20	24		

123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890	12345678901234567890123456789012345678901234567890	12345678901234567890123456789012345678901234567890
1	11000.	10.
2	11000.	10.
3	11000.	10.
4	11000.	10.
5	11000.	10.
6	11000.	10.
7	11000.	10.
8	11000.	10.
9	11000.	10.
10	11000.	10.
11	11000.	10.
12	11000.	10.
13	11000.	10.
14	11000.	10.
15	11000.	10.
16	11000.	10.
17	11000.	10.
18	11000.	10.
19	11000.	10.
20	11000.	10.
21	11000.	10.
22	11000.	10.
23	11000.	10.
24	11000.	10.
25	11000.	10.
26	11000.	10.
27	11000.	10.
28	11000.	10.
29	11000.	10.
30	11000.	10.
31	11000.	10.
32	11000.	10.

APÊNDICE D

**LISTAGEM DE SAIDA DO PROGRAMA BOUNDARY
RELATIVA AO EXEMPLO DO ITEM 4. DO CAPÍTULO V**

PROGRAMA BOUNDARY

P/ RESOLUCAO DE PROBLEMAS TRIDIMEN-
SIONAIS EM UM SEMI-ESPACO INFINITO
P/ METODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO

COPPE - U.F.R.J. - 1987

JORGE ROBERTO ABRAHAO HIJJAR

*** EXEMPLO POULOS PAG. 54 ***

NUMERO DE VERTICES DE ELEMENTOS	25
NUMERO DE ELEMENTOS DE CONTORNO	32
NUMERO DE PONTOS INTERNOS	6
MODULO DE ELASTICIDADE TRANVERSAL	100000.000
MODULO DE POISSON3000000

COORDENADAS DOS VERTICES DOS ELEMENTOS

<u>VERTICE</u>	<u>COORD X</u>	<u>COORD Y</u>	<u>COORD Z</u>
1	.0000	-15.0000	-10.0000
2	.0000	-7.5000	-10.0000
3	.0000	.0000	-10.0000
4	.0000	7.5000	-10.0000
5	.0000	15.0000	-10.0000
6	.0000	-15.0000	-5.0000
7	.0000	-7.5000	-5.0000
8	.0000	.0000	-5.0000
9	.0000	7.5000	-5.0000
10	.0000	15.0000	-5.0000
11	.0000	-15.0000	.0000
12	.0000	-7.5000	.0000
13	.0000	.0000	.0000
14	.0000	7.5000	.0000
15	.0000	15.0000	.0000
16	.0000	-15.0000	5.0000
17	.0000	-7.5000	5.0000
18	.0000	.0000	5.0000
19	.0000	7.5000	5.0000
20	.0000	15.0000	5.0000
21	.0000	-15.0000	10.0000
22	.0000	-7.5000	10.0000
23	.0000	.0000	10.0000
24	.0000	7.5000	10.0000
25	.0000	15.0000	10.0000

INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS

<u>ELEM</u>	<u>NO 1</u>	<u>NO 2</u>	<u>NO 3</u>
1	2	1	6
2	2	6	7
3	3	2	7
4	3	7	8
5	4	3	8
6	4	8	9
7	5	4	9
8	5	9	10
9	7	6	11
10	7	11	12
11	8	7	12
12	8	12	13
13	9	8	13
14	9	13	14
15	10	9	14
16	10	14	15
17	12	11	16
18	12	16	17
19	13	12	17
20	13	17	18

21	14	13	18
22	14	18	19
23	15	14	19
24	15	19	20
25	17	16	21
26	17	21	22
27	18	17	22
28	18	22	23
29	19	18	23
30	19	23	24
31	20	19	24
32	20	24	25

CONDICOES DE CONTORNO

ELEM	DIRECAO X		DIRECAO Y		DIRECAO Z	
	TIPO	VALOR	TIPO	VALOR	TIPO	VALOR
1	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
2	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
3	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
4	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
5	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
6	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
7	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
8	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
9	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
10	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
11	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
12	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
13	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
14	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
15	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
16	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
17	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
18	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
19	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
20	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
21	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
22	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
23	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
24	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
25	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
26	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
27	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
28	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
29	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
30	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
31	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000
32	FORC	1000.000	FORC	.000	FORC	.000

RESULTADOS DO PROBLEMA
=====

NOS DO CONTORNO - DESLOCAMENTOS

<u>NO</u>	<u>COORD</u> <u>X</u>	<u>COORD</u> <u>Y</u>	<u>COORD</u> <u>Z</u>	<u>DESLOC</u> <u>X</u>	<u>DESLOC</u> <u>Y</u>	<u>DESLOC</u> <u>Z</u>
1	.0000	-12.5000	-8.3333	.0657	.0086	.0083
2	.0000	-10.0000	-6.6667	.0770	.0072	.0073
3	.0000	-5.0000	-8.3333	.0773	.0032	.0105
4	.0000	-2.5000	-6.6667	.0850	.0017	.0084
5	.0000	2.5000	-8.3333	.0785	-.0016	.0107
6	.0000	5.0000	-6.6667	.0836	-.0034	.0082
7	.0000	10.0000	-8.3333	.0714	-.0067	.0093
8	.0000	12.5000	-6.6667	.0706	-.0094	.0064
9	.0000	-12.5000	-3.3333	.0758	.0103	.0031
10	.0000	-10.0000	-1.6667	.0844	.0061	.0017
11	.0000	-5.0000	-3.3333	.0904	.0037	.0041
12	.0000	-2.5000	-1.6667	.0936	.0019	.0021
13	.0000	2.5000	-3.3333	.0920	-.0019	.0042
14	.0000	5.0000	-1.6667	.0920	-.0038	.0020
15	.0000	10.0000	-3.3333	.0831	-.0079	.0035
16	.0000	12.5000	-1.6667	.0769	-.0105	.0015
17	.0000	-12.5000	1.6667	.0769	.0105	-.0015
18	.0000	-10.0000	3.3333	.0831	.0079	-.0035
19	.0000	-5.0000	1.6667	.0920	.0038	-.0020
20	.0000	-2.5000	3.3333	.0920	.0019	-.0042

21	.0000	2.5000	1.6667	.0936	-.0019	-.0021
22	.0000	5.0000	3.3333	.0904	-.0037	-.0041
23	.0000	10.0000	1.6667	.0844	-.0081	-.0017
24	.0000	12.5000	3.3333	.0758	-.0103	-.0031
25	.0000	-12.5000	6.6667	.0706	.0094	-.0064
26	.0000	-10.0000	8.3333	.0714	.0067	-.0093
27	.0000	-5.0000	6.6667	.0836	.0034	-.0082
28	.0000	-2.5000	8.3333	.0765	.0016	-.0107
29	.0000	2.5000	6.6667	.0850	-.0017	-.0084
30	.0000	5.0000	8.3333	.0773	-.0032	-.0105
31	.0000	10.0000	6.6667	.0770	-.0072	-.0073
32	.0000	12.5000	8.3333	.0657	-.0086	-.0083

NOS DO CONTOURNO - FORÇAS DE SUPERFICIE

NO	COORD X	COORD Y	COORD Z	FORÇA X	FORÇA Y	FORÇA Z
1	.0000	-12.5000	-8.3333	1000.0000	.0000	.0000
2	.0000	-10.0000	-6.6667	1000.0000	.0000	.0000
3	.0000	-5.0000	-8.3333	1000.0000	.0000	.0000
4	.0000	-2.5000	-6.6667	1000.0000	.0000	.0000
5	.0000	2.5000	-8.3333	1000.0000	.0000	.0000
6	.0000	5.0000	-6.6667	1000.0000	.0000	.0000
7	.0000	10.0000	-6.3333	1000.0000	.0000	.0000
8	.0000	12.5000	-6.6667	1000.0000	.0000	.0000
9	.0000	-12.5000	-3.3333	1000.0000	.0000	.0000
10	.0000	-10.0000	-1.6667	1000.0000	.0000	.0000
11	.0000	-5.0000	-3.3333	1000.0000	.0000	.0000
12	.0000	-2.5000	-1.6667	1000.0000	.0000	.0000
13	.0000	2.5000	-3.3333	1000.0000	.0000	.0000
14	.0000	5.0000	-1.6667	1000.0000	.0000	.0000
15	.0000	10.0000	-3.3333	1000.0000	.0000	.0000
16	.0000	12.5000	-1.6667	1000.0000	.0000	.0000
17	.0000	-12.5000	1.6667	1000.0000	.0000	.0000
18	.0000	-10.0000	3.3333	1000.0000	.0000	.0000
19	.0000	-5.0000	1.6667	1000.0000	.0000	.0000
20	.0000	-2.5000	3.3333	1000.0000	.0000	.0000

21	.0000	2.5000	1.6667	1000.0000	.0000	.0000
22	.0000	5.0000	3.3333	1000.0000	.0000	.0000
23	.0000	10.0000	1.6667	1000.0000	.0000	.0000
24	.0000	12.5000	3.3333	1000.0000	.0000	.0000
25	.0000	-12.5000	6.6667	1000.0000	.0000	.0000
26	.0000	-10.0000	8.3333	1000.0000	.0000	.0000
27	.0000	-5.0000	6.6667	1000.0000	.0000	.0000
28	.0000	-2.5000	8.3333	1000.0000	.0000	.0000
29	.0000	2.5000	6.6667	1000.0000	.0000	.0000
30	.0000	5.0000	8.3333	1000.0000	.0000	.0000
31	.0000	10.0000	6.6667	1000.0000	.0000	.0000
32	.0000	12.5000	8.3333	1000.0000	.0000	.0000

PONTOS INTERNOS - DESLOCAMENTOS

PTO	COORD X	COORD Y	COORD Z	DESLOC X	DESLOC Y	DESLOC Z
1	6.0000	-15.0000	10.0000	.0440	-.0012	.0015
2	12.0000	-15.0000	10.0000	.0399	-.0035	.0031
3	15.0000	-15.0000	10.0000	.0377	-.0038	.0032
4	18.0000	-15.0000	10.0000	.0356	-.0038	.0031
5	24.0000	-15.0000	10.0000	.0317	-.0034	.0026
6	30.0000	-15.0000	10.0000	.0263	-.0029	.0022

PONTOS INTERNOS - TENSÕES

PTO	SIGMA XX	SIGMA XY	SIGMA XZ	SIGMA YY	SIGMA YZ	SIGMA ZZ
1	-246.8919	149.1066	-145.2846	-130.3036	66.6055	-127.7890
2	-230.8861	124.9204	-114.5118	-83.2809	51.5053	-66.5129
3	-218.2022	111.0218	-98.3367	-65.0159	42.1496	-46.7481
4	-203.7493	97.3906	-83.4524	-50.1546	33.8991	-32.0669
5	-173.3768	73.2091	-59.2216	-29.0459	21.5153	-14.1942
6	-145.0632	54.3513	-42.0655	-16.3312	13.6842	-5.3918